<< 92 指考數甲詳解 >>

一、單選題

1. 平面上有 A、B、C 三點。已知 B、C 之間的距離是 200 公尺，B、A 之間的距離是 1500 公尺，$\angle ACB$ 等於 $60°$．請問 A、C 之間距離的最佳近似值是哪一個選項?

   (1) 1500 公尺　(2) 1600 公尺　(3) 1700 公尺　(2) 1800 公尺． <92 數甲>

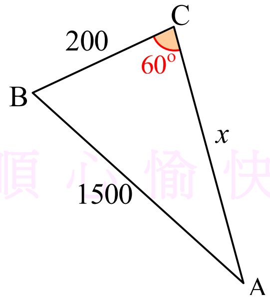
解： 設 $\overline{AC}=x$ ，由餘弦定理知 $1500^2=x^2+200^2-2\bullet 200\bullet x\bullet\cos 60°$ ，

即 $2250000=x^2+40000-200x$，

整理得 $x^2-200x-2210000=0$，

$\Rightarrow x=\dfrac{200\pm\sqrt{8880000}}{2}=100(1\pm\sqrt{222})$ (負不合)

又 $\sqrt{222}\approx 15$ ，因此 x 之值接近 100(1+15)=1600。



故選(2)。

2. 某國政府長期追蹤全國國民的經濟狀況，依訂定的標準將國民分爲高收入和低收入兩類。統計發現高收入的人口一直是低收入人口的兩倍，且知在高收入的人口中，每年有四成會轉變爲低收入。請問在低收入的人口中，每年有幾成會轉變爲高收入?

請選出正確的選項。(A) 6 成　(B) 7 成　(C) 8 成　(D) 9 成 <92 數甲>

解： 轉移矩陣爲 $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{高} & \text{低}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{高}\\ \\ \text{低}\end{array} & \begin{bmatrix}\frac{6}{10} & \frac{x}{10}\\[4pt] \frac{4}{10} & \frac{10-x}{10}\end{bmatrix}\end{array}=A$ ，且高低收入爲 $\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\[4pt] \frac{1}{3}\end{bmatrix} & \begin{array}{c}\text{高}\\ \\ \text{低}\end{array}\end{array}$

$\because$ 穩定狀態 $\Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{6}{10} & \frac{x}{10}\\[4pt] \frac{4}{10} & \frac{10-x}{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\[4pt] \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\[4pt] \frac{1}{3}\end{bmatrix}$ 得 $\begin{cases}\frac{2}{5}+\frac{x}{30}=\frac{2}{3}\\[4pt] \frac{4}{15}+\frac{10-x}{30}=\frac{1}{3}\end{cases}$， 解得 $x=8$。

故選(C)。

二、多選題

1. A 和 B 是兩個二階方陣，方陣中每一位置的元素都是實數。

就二階方陣所對應的平面變換來說，A 在平面上的作用是對直線 $L: y+\sqrt{3}x=0$ 的鏡射，

且知 $AB=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$。請選出正確的選項。

（說明：A 將 P 點對應到 Q 點，則 L 爲線段 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線） <92 數甲>

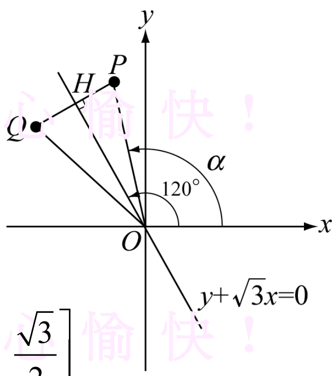
(A) $AB=BA$

(B) $A+B=0$

(C) B 所對應的平面變換是旋轉

(D) $-A$ 是 B 的（乘法）反方陣．

解： 矩陣 $\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$ 表示對傾斜角爲 θ 且過原點的直線 L 做鏡射變換。



$L: y+\sqrt{3}x=0 \Rightarrow y=-\sqrt{3}x=-\tan 120^\circ x \Rightarrow \theta=120^\circ$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\cos 240^\circ & \sin 240^\circ\\ \sin 240^\circ & -\cos 240^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$\because AB=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \therefore B=A^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$。

(A) $\because BA=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，$\therefore$ 以 $AB=BA$。

(B) $A+B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$。

(C) $\because$ B 不可以化成 $\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}$ 的形式，$\therefore$ B 不是旋轉矩陣。

(D) $\because$ $B(-A)=-BA=-(-I_2)=I_2$，且 $(-A)B=-AB=-(-I_2)=I_2$，

$\therefore$ $-A$ 是 B 的乘法反方陣。

故選(A)(B)(D)。

注意： $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 的乘法反方陣 $=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$。

2. 已知不等式 $1.253\times10^{845} < 7^{1000} < 1.254\times10^{845}$ 成立。請選出正確的選項。

(A) $\log_{10}7 < 0.846$ (B) $\log_{10}7 > 0.845$ (C) $7^{100} < 5\times10^{84}$ (D) $7^{10} < 2\times10^{8}$. <92 數甲>

解：(A)(B) 取對數後，得 $\log(1.253\times10^{845}) < \log(7^{1000}) < \log(1.254\times10^{845})$

即 $845+\log1.253 < 1000\log7 < 845+\log1.254$ ，

$\because \log1.253 < \log2 \approx 0.3010 \quad \therefore \quad 0.845 < \log7 < 0.846$ 。

(C) $\log7^{100} = 100\log7 < 1000\times0.846 = 84.6$ ，

又 $\log(5\times10^{84}) = 84+\log5 = 84+(1-\log2) \approx 84+0.6990 = 84.699$，

所以 $7^{100} < 5\times10^{84}$ 。

(D) $\log7^{10} = 10\log7 < 10\times0.846 = 8.45$ ，

又 $\log(2\times10^{8}) = 8+\log2 \approx 8+0.3010 = 8.3010$，

所以 $7^{10} > 2\times10^{8}$ 。

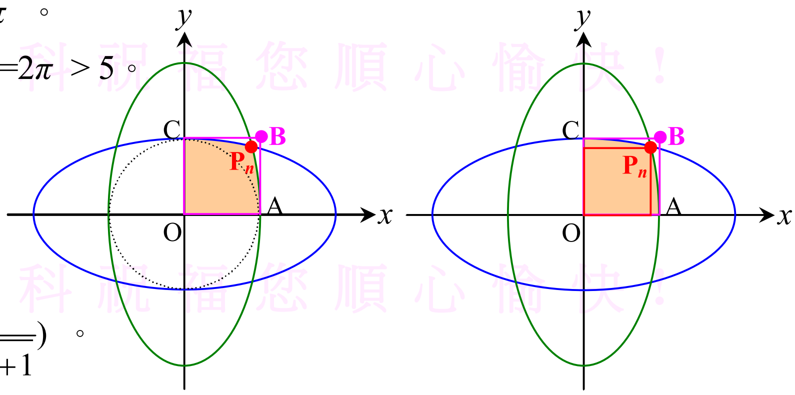
故選(1)(2)(3)。

3. 設 n 為大於 1 的整數，坐標平面上兩個橢圓區域 $\frac{x^2}{n^2}+y^2 \le 1$ 和 $x^2+\frac{y^2}{n^2} \le 1$ 共同的部分以 A_n 表示，請選出正確的選項。 (1) A_n 的面積小於 4 (2) A_n 的面積大於 π (3) A_n 的周長大於 5 (4) 當 n 趨於無窮大時，A_n 的面積趨近於 4 。 <92 數甲>

解：(1) A_n 面積 <4(正方形 ABCO 面積) $=4$

(2) A_n 面積 >4(扇形 ACO 面積) $=\pi$ 。

(3) A_n 周長 $>$ 圓 O(半徑 1)的周長 $=2\pi > 5$ 。



(4) 解聯立 $\begin{cases} \frac{x^2}{n^2}+y^2=1 \\ x^2+\frac{y^2}{n^2}=1 \end{cases}$

得第一象限交點 $P_n(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},\frac{n}{\sqrt{n^2+1}})$ 。

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\text{正方形(對角線}OP_n\text{)面積}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}})^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = 1$，

又正方形 ABCO 的面積=1 。 由夾擠定理得 $\lim_{n\to\infty}(OAP_nC\text{的面積}) = 1$ 。

故所求 $\lim_{n\to\infty}(A_n\text{的面積}) = 4\cdot\lim_{n\to\infty}(AP_nCO\text{的面積}) = 4$ 。

故選(1)(2)(3)(4)。

4. 在一個牽涉到兩個未知量 x, y 的線性規劃作業中，有三個限制條件。坐標平面上符合這三個限制條件的區域是一個三角形區域。假設目標函數 $ax+by$（a , b 是常數）在此三角形的一個頂點(19, 12)上取得最大值 31，而在另一個頂點(13, 10)取得最小值 23。現因業務需要，加入第四個限制條件，結果符合所有限制條件的區域變成一個四邊形區域，頂點少了(19, 12)，新增了(17, 13)和(16, 11)。在這四個限制條件下，選出正確的選項。

(1) $ax+by$ 的最大值發生在(17, 13)　　(2) $ax+by$ 的最小值發生在(16, 11)　　<92 數甲>

(3) $ax+by$ 的最大值是 30　　(4) $ax+by$ 的最小值是 27

解：設目標函數：$f(x, y)=ax+by$，

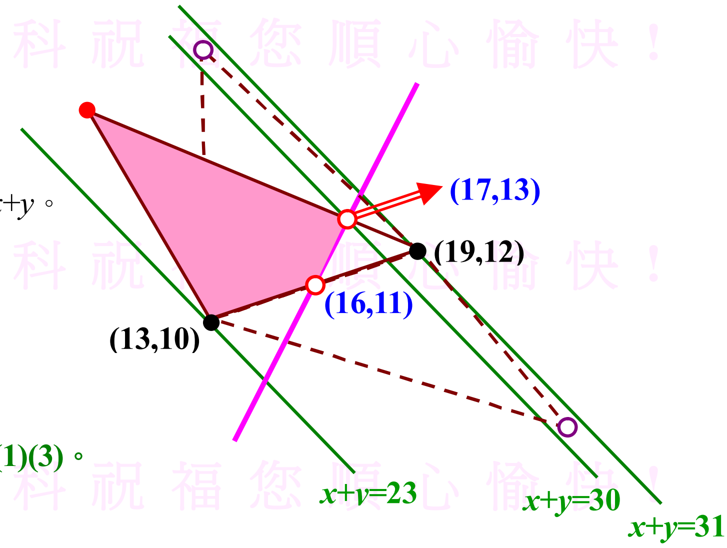
開始時：$\begin{cases} f(19,\ 12)=19a+12b=31 \\ f(13,\ 10)=13a+10b=23 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow$ 目標函數：$f(x, y)=x+y$。

調整後：$\begin{cases} f(17,\ 13)=17+13=30 \\ f(16,\ 11)=16+11=27 \end{cases}$。

調整後在點(17, 13)有最大值 30，

在點(13, 10)有最小值 23，**故選(1)(3)**。



5. 有一筆統計資料，共有 11 個數據如下（不完全依大小排列）：

2，4，4，5，5，6，7，8，11，x 和 y，

已知這些數據的算術平均數和中位數都是 6，且 x 小於 y 。請選出正確的選項 .

(1) $x+y=14$　(2) $y<9$　(3) $y>8$　(4) 標準差至少是 3 .　　<92 數甲>

解：(1) 平均數為 6 $\Rightarrow \dfrac{2+4+4+5+5+6+7+8+11+x+y}{11}=6 \Rightarrow x+y=14$ 。

(2) 中位數為 6，且 2，4，4，5，5，6，7，8，11 之第 6 個數字就是 6，

$\Rightarrow$ 加入 x，y 後，前 6 個數的次序須不變才會使中位數為 6，

$\Rightarrow 6 \le x < y$ ，又 $x+y=14$ $\Rightarrow 6 \le x < y \le 8$ 。

(3) 標準差 $S=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$

$$=\sqrt{\frac{4^2+2^2+2^2+1^2+1^2+0+1^2+2^2+5^2+(x-6)^2+(y-6)^2}{11}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{11}[56+(x-6)^2+(y-6)^2]}<\sqrt{\frac{1}{11}[56+(8-6)^2+(8-6)^2]}$$

$$=\sqrt{\frac{64}{11}}<3$$ 。

故選(1)(2)。

6. $f(x)$是一個首項係數為 1 的實係數三次多項式，k 是一個常數。已知當 $k<0$ 或 $k>4$ 時，$f(x)-k=0$ 只有一個實根；當 $0<k<4$ 時，$f(x)-k=0$ 有三個相異實根。
請選出正確的選項。
(1) $f(x)-4=0$ 和 $f'(x)=0$ 有共同實根
(2) $f(x)=0$ 和 $f'(x)=0$ 有共同實根
(3) $f(x)+3=0$ 的任一實根大於 $f(x)-6=0$ 的任一實根 <92 數甲>
(4) $f(x)+5=0$ 的任一實根小於 $f(x)-2=0$ 的任一實根．

解： $f(x)-k=0 \Rightarrow f(x)=k$，其實根即為 $y=f(x)$與 $y=k$ 兩圖形交點的 x 坐標，依題意作圖如下，

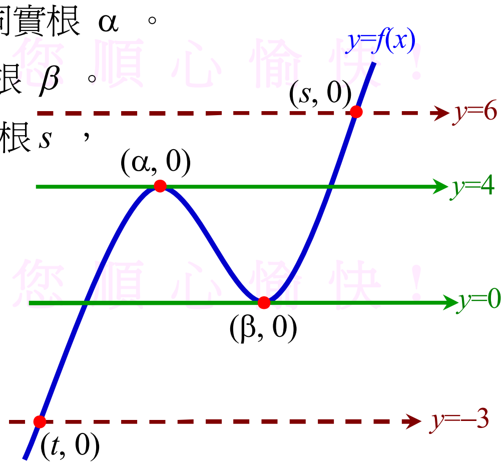
(1) $f(\alpha)=4$ 且 $f'(\alpha)=0$，$\Rightarrow f(x)-4=0$ 和 $f'(x)=0$ 有共同實根 α。

(2) $f(\beta)=0$ 且 $f'(\beta)=0$，$\Rightarrow f(x)=0$ 和 $f'(x)=0$ 有共同實根 β。

(3) 由圖知，$f(x)=-3$ 恰有一實根 t，$f(x)=6$ 恰有一實根 s，
且由圖得 $t<s$。

(4) 同(3)，$f(x)=-5$ 恰有一實根，
且小於 $f(x)=2$ 的任一實根(三實根)。

故選(1)(2)(4)。



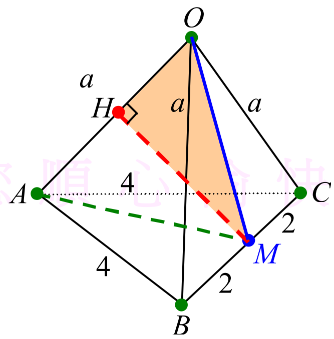
第貳部分：非選擇題

1. 有一四面體 $OABC$，它的一個底面 ABC 是邊長為 4 的正三角形， <92 數甲>
且知 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=a$；如果直線 OA 與直線 BC 間的公垂線段長（亦即此兩直線間的距離）是 $\sqrt{3}$，求 a 之值（以最簡分數表示）.

解： 設直線 OA 與直線 BC 的公垂線段交交 $\overline{AO}$ 於 H，交 $\overline{BC}$ 於 $M \Rightarrow \overline{HM}=\sqrt{3}$，

則 $\overline{OH}\perp\overline{HM}$，$\overline{HM}\perp\overline{BC}$，

由三垂線定理得 $\overline{OM}\perp\overline{BC}$，且 M 為 $\overline{BC}$ 中點。



則 ΔABM 中，$\overline{AM}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

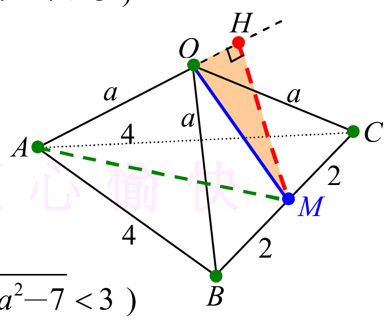
ΔOCM 中，$\overline{OM}=\sqrt{a^2-2^2}=\sqrt{a^2-4}$。

ΔAMH 中，$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{HM}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$，

$\Rightarrow \Delta OMH$ 中，$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OM}^2-\overline{HM}^2}=\sqrt{(a^2-4)-(\sqrt{3})^2}$，

$\overline{OA}=\overline{AH}+\overline{OH}=3+\sqrt{a^2-7}=a$，解得 $a=\dfrac{8}{3}$（不合 $\because a=3+\sqrt{a^2-7}>3$）

所以 H 不是 $\overline{AO}$ 的內分點，而是外分點。



$\Rightarrow \Delta OMH$ 中，$\overline{HO}=\sqrt{\overline{HM}^2-\overline{OM}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-(a^2-4)}=\sqrt{7-a^2}$，

$\Rightarrow \Delta HAM$ 中，$\overline{HA}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{HM}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$，

$\overline{OA}=\overline{AH}-\overline{OH}=3-\sqrt{7-a^2}=a$，解得 $a=\dfrac{8}{3}$（符合 $\because a=3-\sqrt{a^2-7}<3$）

2. 彩票公司每天開獎一次，從 1、2、3 三個號碼中隨機開出一個。開獎時，如果開出的號碼和前一天相同，就要重開，直到開出與前一天不同的號碼爲止。如果在第一天開出的號碼是 3，求在第五天開出號碼同樣是 3 的機率。 <92 數甲>

解： 轉移矩陣爲 $A=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$，令 P_n 表第 n 天開出號碼的機率矩陣，則 $P_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$。

$$\Rightarrow P_2=AP_1=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}，\Rightarrow P_3=AP_2=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}，$$

$$\Rightarrow P_4=AP_3=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{8}\\\frac{3}{8}\\\frac{1}{4}\end{bmatrix}，\Rightarrow P_4=AP_3=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{8}\\\frac{3}{8}\\\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{16}\\\frac{5}{16}\\\frac{3}{8}\end{bmatrix}，$$

所以第 5 天開出號碼同樣是 3 的機率爲 $\frac{3}{8}$。

另解： 將所有情形以樹形圖分析如右，

因爲每一分叉的機率都是 $\frac{1}{2}$，

所以第 5 天的每一情形的機率都是 $(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$，

而第 5 天開出號碼是 3 的情形有 6 個。

故所求 $=6\times\frac{1}{16}=\frac{3}{8}$。

- 3 <
  - 1 <
    - 2 <
      - 1 < 2, $\boxed{3}$
      - 3 < 1, 2
    - 3 <
      - 1 < 2, $\boxed{3}$
      - 2 < 1, $\boxed{3}$
  - 2 <
    - 1 <
      - 2 < 1, $\boxed{3}$
      - 3 < 1, 2
    - 3 <
      - 1 < 2, $\boxed{3}$
      - 2 < 1, $\boxed{3}$

3. 坐標平面上有一個橢圓，已知在(8, 4)，(9, 11)，(15, 5)和(16, 12)這四個點中，
有兩個是焦點，另外兩個是頂點，求此橢圓的半長軸長度。 <92 數甲>

解： 由圖知 A，C 的中點及 B，D 的中點 $M(12, 8)$為橢圓的中心。

長軸上的頂點必與焦點共線，

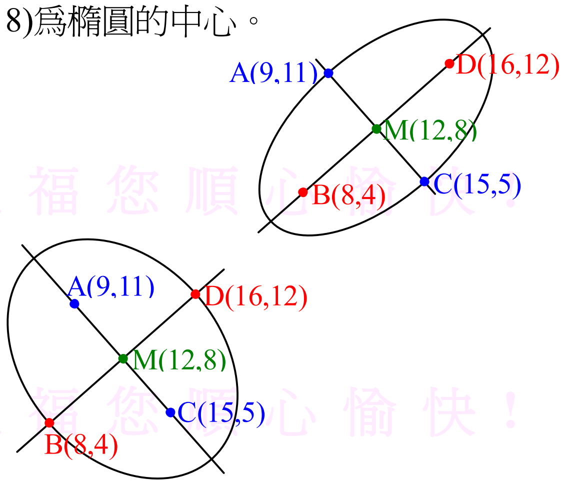
所以題目中的頂點必為短軸上的頂點。

又 $\overline{AM}=\overline{CM}=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$，

且 $\overline{BM}=\overline{DM}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$，

所以 $(b,\ c)=(3\sqrt{2},\ 4\sqrt{2})$ 或 $(4\sqrt{2},\ 3\sqrt{2})$。

故所求 $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{18+32}=\sqrt{50}$。



4. 坐標平面上，當點 $P(x, y)$在曲線 $y^2+2xy+x^2-2x+6y+1=0$ 上變動時，
求點 P 到直線 $x-y+4=0$ 的距離的最小值。 <92 數甲>

解： 設平行 $x-y+4=0$ 且與曲線相切的直線為 $x-y+k=0$，

將 $y=x+k$，代入 $y^2+2xy+x^2-2x+6y+1=0$，

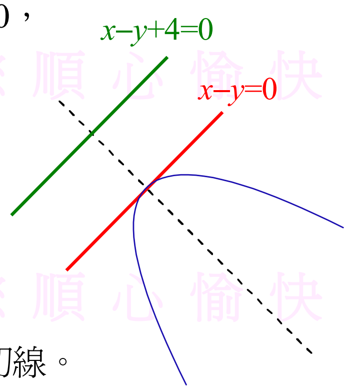
得 $(x+k)^2+2x(x+k)+x^2-2x+6(x+k)+1=0$，

$\Rightarrow 4x^2+(4k+4)x+(k^2+6k+1)=0$

因為相切，所以判別式 $D=(4k+4)^2-4\times4(k^2+6k+1)=0$，

$\Rightarrow (k+1)^2-(k^2+6k+1)=0$，

$\Rightarrow k=0 \quad \Rightarrow x-y=0$ 為曲線的切線。



故所求為二平行線 $x-y+4=0$ 與 $x-y=0$ 的距離，即 $\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$。