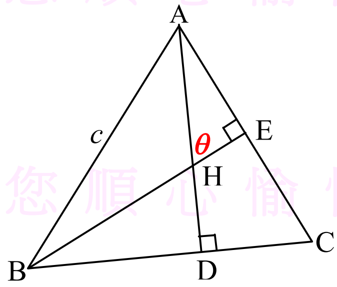
<< 89 指考數甲詳解 >>

板 橋 高 中 數 學 科 祝 福 您 順 心 愉 快 ！

一 、單選題

1. 設 H 為銳角三角形 ABC 的垂心（三高之交點）， <89 數甲>
若以 c 表線段 $\overline{AB}$ 之長，則線段 $\overline{AH}$ 之長等於
(1) $c\cos A\sin C$ (2 $c\cos A\cos C$ (3) $c\cos A\tan C$ (4) $c\cos A\sec C$ (5) $c\cos A\csc C$

解：如圖 $CDHE$ 四點共圓 $\therefore \angle C=\theta$，



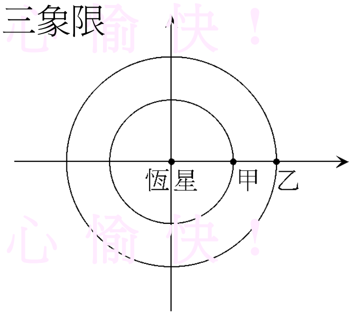
ΔAHE 中， $\sin\theta=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AH}} \Rightarrow \overline{AH}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin\theta}=\overline{AE}\csc\theta$

又 ΔABE 中， $\cos A=\dfrac{\overline{AE}}{c} \Rightarrow \overline{AE}=c\cdot\cos A$

所以 $\overline{AH}=\overline{AE}\boxed{\csc\theta}=c\cdot\cos A\cdot\boxed{\csc C}$ 。

故選(5)。

2. 某恆星系統中有甲、乙兩行星，假設兩者公轉軌道在同一平面上，且以恆星為圓心的同心圓。某時，甲行星在恆星與乙行星之間而成一直線。今在該平面上設定一坐標系如下圖。已知兩行星皆以逆時針方向運行，且公轉之週期為 2：7。試問下一次甲行星再度在恆星與乙行星之間而成一直線時，應該是下面哪一種狀況？ <89 數甲>
(1) 行星在第一象限 (2) 行星在第二象限 (3) 行星在第三象限
(4) 行星在第四象限 (5) 行星在正 x 軸上



解：設甲轉一圈要 2 秒，乙轉一圈要 7 秒，

$\Rightarrow$甲每秒轉 $\dfrac{360^\circ}{2}=180^\circ$ ，乙每秒轉 $\dfrac{360^\circ}{7}\approx 51.4^\circ$

$\Rightarrow$甲比乙每秒多轉 $180^\circ-51.4^\circ=128.6^\circ$

下一次三者成一直線，甲必須比乙多轉一圈，即 360°， 即 $\dfrac{360^\circ}{128.6^\circ}\approx 2.8$(秒)後。

過了 2.8 秒後，甲轉了 $\dfrac{2.8}{2}=1.4$ 圈 $\Rightarrow$ 此時甲在第二象限。

故選(2)。

3. 某班有 48 名學生，某次數學考試之成績，經計算得算術平均數為 70 分，標準差為 S 分。後來發現成績登錄有誤，某甲得 80 分，卻誤記為 50 分，某乙得 70 分，卻誤記為 100 分，更正後重算得標準差為 S_1 分，試 S_1 與 S 之間，有下列哪種大小關係？ <89 數甲>

（n 個數值 x_1，x_2，…，x_n 的標準差公式為 $S=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-\overline{x}^2}$，而 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$）

(A) $S_1<S-5$ (B) $S-5\le S_1<S$ (C) $S_1=S$ (D) $S<S_1\le S+5$ (E) $S+5<S_1$

解： (1) 新平均數 $\overline{x}=\dfrac{(48\times 70-50-100-25+80+70)}{48}=\dfrac{48\times 70}{48}=70$ 。

(2) 原平方和 $=\sum_{i=1}^{48}x_i^{\,2}=48\times S^2+48\times 70^2$ 。

新平方和 $=\sum_{i=1}^{48}x_i^{\,2}=48\times S_1^{\,2}+48\times 70^2$ ，

又新平方和 $=(48\times S^2+48\times 70^2)-50^2-100^2+80^2+70^2=(48\times S^2+48\times 70^2)-1200$ ，

$\therefore 48\times S_1^{\,2}+48\times 70^2=(48\times S^2+48\times 70^2)-1200$

$\Rightarrow 48(S_1^{\,2}-S^2)=-1200\Rightarrow S_1^{\,2}-S^2=-25\Rightarrow S_1^{\,2}+25=S^2$

所以 $(S-S_1)^2=(S-S_1)(S-S_1)\le(S-S_1)(S+S_1)=S^2-S_1^{\,2}=25$

$\Rightarrow S-S_1\le 5\Rightarrow S-5\le S_1$ 且 $S_1<S$ 。

故選(2)。

注意： $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{n}\left[(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2})-n\cdot\overline{x}^2\right]\Rightarrow n\cdot S^2=(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2})-n\cdot\overline{x}^2\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}=n\cdot S^2+n\cdot\overline{x}^2$ 。

4. 袋中有六個乒乓球，分別編號為 1，2，3，4，5，6。每次自袋中隨機抽取一球，然後將袋中編號為該球號碼之因數或倍數者一併自袋中取出（例如第一次抽中 2 號球，則將 1 號、2 號、4 號、6 號四球皆取出），再進行下一次的抽取。試問最後一次抽取時，袋中只剩 5 號球的機率是多少？

(1) $\frac{7}{18}$ (2) $\frac{9}{18}$ (3) $\frac{11}{18}$ (4) $\frac{13}{18}$ (5) $\frac{15}{18}$ <89 數甲>

解： 若抽中 1 號，則沒有剩球，所以抽球號碼為 2，3，4，6，

① 第一次抽 2 號，剩 3、5 號，第二次抽 3 號 $\Rightarrow\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$ ，

② 第一次抽 3 號，剩 2、4、5 號，第二次抽 2 號或 4 號 $\Rightarrow\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$ ，

③ 第一次抽 4 號，剩 3、5、6 號，第二次抽 3 號或 6 號 $\Rightarrow\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$ ，

④ 第一次抽 6 號，剩 4、5 號，第二次抽 4 號 $\Rightarrow\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$ ，

$\therefore$ 所求機率 $=\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$ 。**故選(1)。**

板 橋 高 中 數 學 科 祝 福 您 順 心 愉 快 ！

二、多選題

5. 有一 4 階方陣，其中每一 $(i，j)$ 元不是 0 就是 1，則其秩可能是 <89 數甲>

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3　(E) 4

解： $\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$秩為 0；$\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$秩為 1；$\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0&0\\0&\boxed{1}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$秩為 2；

$\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0&0\\0&\boxed{1}&0&0\\0&0&\boxed{1}&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$秩為 3；$\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0&0\\0&\boxed{1}&0&0\\0&0&\boxed{1}&0\\0&0&0&\boxed{1}\end{bmatrix}$秩為 4。

故選(A)(B)(C)(D)(E)。

注意：矩陣經列運算化簡後，對角線不為 0 的元素之個數稱為秩。

6. 設 a 為一非零實數，試問方程式 $x^3+x^2-x+a=0$ 的根可能的情形為何？ <89 數甲>

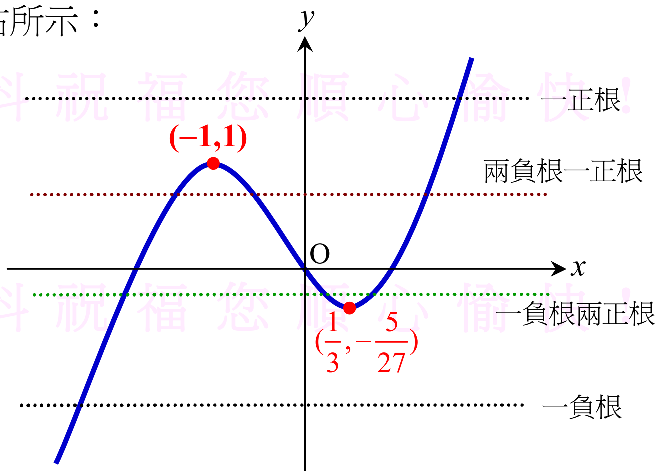
(1) 有三個負根　(2) 有兩個負根和一個正根　(3) 有一個負根和兩個正根

(4) 有三個正根　(5) 僅有一個實根

解：令 $y=f(x)=x^3+x^2-x$，則 $x^3+x^2-x+a=0 \Rightarrow \begin{cases} y=-a \\ y=f(x)=x^3+x^2-x \end{cases}$，

$\Rightarrow\ f'(x)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$，

且 $f'(\frac{1}{3})=-\frac{5}{27}$，$f'(-1)=1$，圖形如右所示：



(1) 沒有三個負根之情形。

(2) 有兩個負根和一個正根。

(3) 有一個負根和兩個正根。

(4) 沒有三個正根之情形。

(5) 僅有一個實根。

故選(2)(3)(5)。

板橋高中數學科祝福您順心愉快！

三、填充題

7. 設實係數二次方程式 $x^2+x+c=0$ 的兩根 a，b 都不是實數， <89 數甲>

而且 $\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$ 也是此方程式的兩根，求 a^2+b^2 之值。

解：由根與係數得 $\begin{cases} a+b=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=-1 \\ a\cdot b=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ ab=1 \end{cases}$。

故所求 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(-1)^2-2=-1$。

8. 某甲在股票市場裡買進賣出頻繁。假設每星期結算都損失該星期初資金的 1%，而第 n 星期結束後資金總損失超過原始資金的一半，則 n 最小為__________。

（已知 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}11=1.0414$） <89 數甲>

解：每星期剩餘資金為原資金的 0.99，

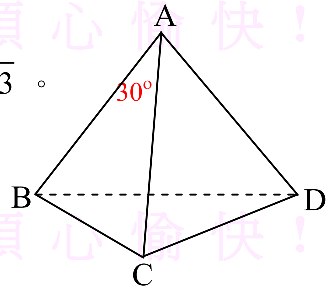
$\therefore\ (0.99)^n<0.5 \quad \Rightarrow n\cdot\log\dfrac{99}{100}<\log\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\ n\,(\,2\log3+\log11-2\,)<-\log 2$

$\Rightarrow\ n\,(-0.0044)<-0.3010 \quad \Rightarrow\ n>\dfrac{3010}{44}\approx 68.4$， 故所求為 69。

9. 設 $ABCD$ 為一四面體，而 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=1$，$\angle DAB=\angle DAC=\angle BAC=30°$， <89 數甲>

求△BCD 的面積。



解：$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos30°=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$。

又△BCD 為正三角形，

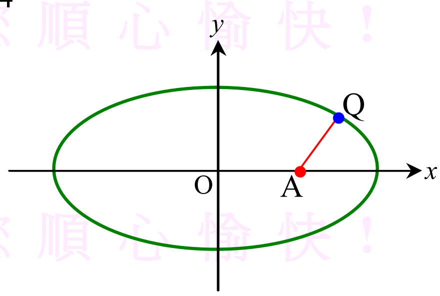
故所求面積為 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\overline{BC}^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(2-\sqrt{3})=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{4}$。

10. 設 $(p,0)$ 為橢圓 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$ 的長軸上一定點且 $0<p<\dfrac{3}{2}$，若點(a,b)為橢圓上距離$(p,0)$最近之點，求 a=?(以 p 的函數表示) <89 數甲>

解：設 Q(x,y)為橢圓上一點，且 A$(p,0)$，

$\Rightarrow \overline{AQ}=\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2-2px+p^2+1-\dfrac{1}{4}x^2}=\sqrt{\dfrac{3}{4}x^2-2px+p^2+1}$，

$=\sqrt{\dfrac{3}{4}(x-\dfrac{4}{3}p)^2-\dfrac{1}{3}p^2+1}$。



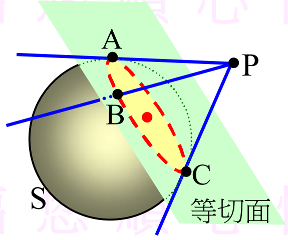
當 $x=\dfrac{4p}{3}$，$\overline{AQ}$ 有最小值。故所求 $a=\dfrac{4p}{3}$。

11. 已知從點 $P(1,2,2)$到球面 S：$x^2+y^2+z^2=1$ 所作所有切線的切點都會在同一平面上，求此平面方程式。 <89 數甲>

解：$P(1, 2, 2)$爲球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外一點，

所求爲一等切面：$1\bullet x+2\bullet y+2\bullet z=1$，

即 $x+2y+2z=1$。



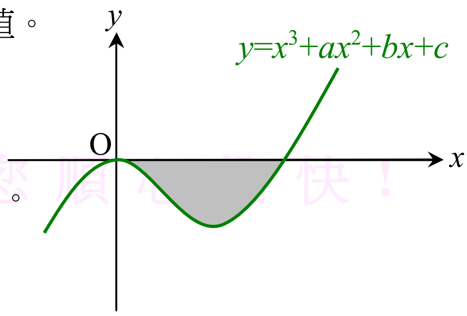
注意：過 $P(x_0,y_0,z_0)$作球面 S：$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$ 的切線，所有的切點形成一個圓。

此圓所在平面方程式爲 $x_0\bullet x+y_0\bullet y+z_0\bullet z+\frac{d}{2}(x_0+x)+\frac{e}{2}(y_0+y)+\frac{f}{2}(z_0+z)+g=0$。

四、計算題

1. 設曲線 $y=x^3+ax^2+bx+c$ 的圖形如右圖，且與 $y=0$ 相切於原點， <89 數甲>

若此切線與曲線所圍區域面積爲 3，求常數 a、b、c 的值。



解：令 $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ $\Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$，

又相切於原點 $\Rightarrow$ $f(0)=0$ 且 $f'(0)=0\Rightarrow b=c=0$。

$\Rightarrow y=x^3+ax^2$ 與 $y=0$ 交於$(0, 0)$與$(-a, 0)$兩點，且 $a<0$。

$$\Rightarrow \int_0^{-a} f(x)dx=\int_0^{-a}(x^3+ax^2)dx=-3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^4}{4}+\frac{ax^3}{3}\right)\Bigg|_0^{-a}=\left(\frac{a^4}{4}+\frac{-a^4}{3}\right)=-\frac{a^4}{12}=-3\Rightarrow a^2=6\Rightarrow a=-\sqrt{6}\ (\because a<0)$$ 。

2. 設坐標平面上二點 $A(4, 4)$，$B(2, 1)$，若 $\overline{AB}$ 與直線 $y=ax+b$ 相交，

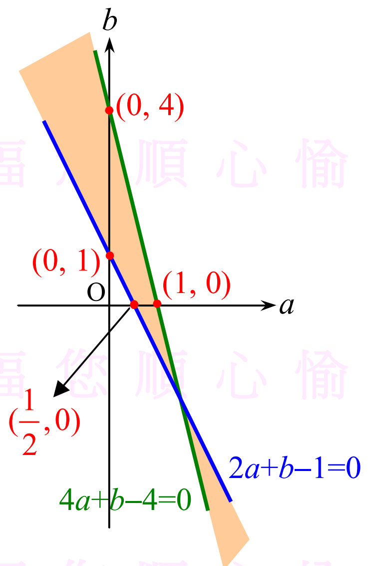
試作一圖以 a 爲橫坐標，b 爲縱坐標，將數對(a, b)的範圍表示出來。 <89 數甲>

解：直線 $y=ax+b\Rightarrow y-ax-b=0$

則 $(4a-4+b)(2a-1+b)\le 0$

$(4a+b-4)(2a+b-1)\le 0$

$$\Rightarrow \begin{cases}4a+b-4\ge 0\\ 2a+b-1\le 0\end{cases} \text{ 或 } \begin{cases}4a+b-4\le 0\\ 2a+b-1\ge 0\end{cases}$$ 。



板橋高中數學科祝福您順心愉快！