<< 87 指考數甲詳解 >>

一、單選題

1. 假設平均每人每日產生的垃圾量，相當於長、寬、高各為 20 公分的正立方體。假設我們的人口以二千一百萬計，而暫時把 1 日的總垃圾量全堆積在一操場上，成為長 100 公尺寬 20 公尺的長方體垃圾山。若一層樓之高以 3 公尺計，則此垃圾山約有多少樓高？

   (1) 不到 8 層樓高　(2) 8 層樓至 16 層樓之間　(3) 16 層樓至 24 層樓之間
   (4) 24 層樓至 32 層樓之間　(5) 超過 32 層樓高　<87 數甲>

解： 設長方體高 x 公尺 $\Rightarrow$ $100 \times 20 \times x = (0.2)^3 \times 21000000$

$\Rightarrow$ $x = 84$，$84 \div 3 = 28$。

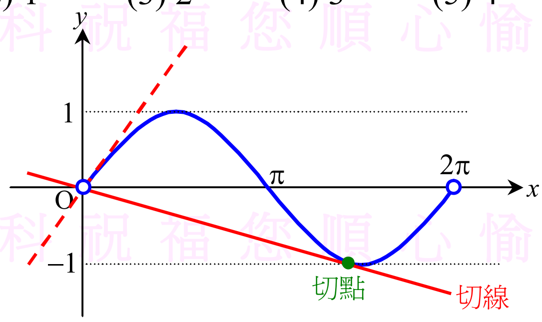
故選(4)。

2. 曲線 $y = \sin x$ 在 $0 < x < 2\pi$ 的範圍內（注意：$x = 0$ 之處已除外），<87 數甲>
   有幾條切線會通過原點？ (1) 0　(2) 1　(3) 2　(4) 3　(5) 4

解： 作 $y = \sin x$，$0 < x < 2\pi$ 之圖形，

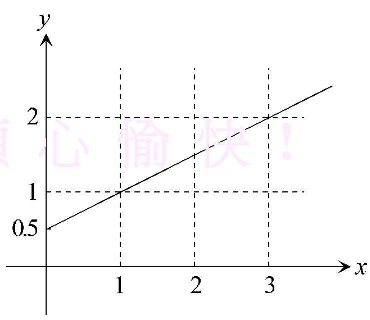
知只有一條切線會過原點。

故選(2)。



3. 有兩變數 x，y，各取對數，得至兩個新的變數 $X = \log_{10}x$，$Y = \log_{10}y$。如果 X，Y 的關係如圖之斜線所示，則 x，y 的關係若以圖表示，應為下則哪一種圖形的一部分？<87 數甲>

   (1) 直線　(2) 拋物線　(3) 雙曲線　(4) 對數函數之圖形
   (5) 指數函數之圖形



解： 點 (X, Y) 在 $(0, 0.5)$，$(1, 1)$，$(3, 2)$之連線上，

$\therefore$ X，Y 之關係式為 $Y = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$，

即 $\log y = \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log 10x = \log\sqrt{10x}$，

$\therefore y = \sqrt{10x}$，$x > 0$，$y > 0$ $\Rightarrow$ $y^2 = 10x$，$x > 0$，$y > 0$

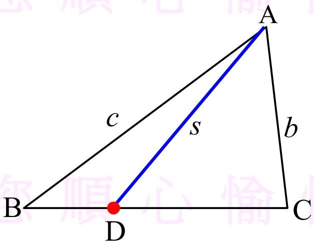
$\therefore$ 表開口向右之拋物線。**故選(2)**。

4. 設△ABC 之 $\angle A = 60°$，$\overline{AC} = b$，$\overline{AB} = c$ 。今在 $\overline{BC}$ 上取一點 D ，使得 $\overline{BD} = \frac{1}{3}\overline{BC}$ ，

令 $s = \overline{AD}$ ，則 s^2 等於 <87 數甲>

(A) $\frac{1}{9}(b^2 + 4c^2 + 4bc)$ (B) $\frac{1}{9}(b^2 + 4c^2 + 2bc)$ (C) $\frac{1}{9}(b^2 + 4c^2 - 2bc)$

(D) $\frac{1}{9}(4b^2 + c^2 + 2bc)$ (E) $\frac{1}{9}(4b^2 + c^2 - 2bc)$



解：$\because\ \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ，

$\therefore\ s^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 = |\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}|^2$

$= \frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2 = \frac{1}{9}(4c^2 + 4c\cdot b\cdot\cos 60° + b^2) = \frac{1}{9}(b^2 + 4c^2 + 2bc)$ 。

故選(2)。

二、多選題

5. 某年聯考甲、乙兩科成績的直方圖如圖所示 <87 數甲>

（由於考生人數眾多，成績分布的直分圖可視為平滑曲線），則下列哪些敘述是正確的？

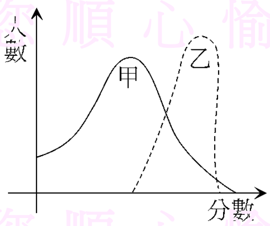
(1) 甲的算術平均數比乙的算術平均數大

(2) 甲的中位數比乙的中位數大

(3) 甲的全距比乙的全距大

(4) 甲的標準差比乙的標準差大

(5) 甲的變異係數比乙的變異係數大



解：(1) 乙的高分者多，而甲少，故甲的算術平均數較小 $\therefore$ (1)不正確

(2) 乙的中位數大 $\therefore$ (2)不正確

(3) 甲的最低分比乙小，但甲的最高分比乙大 $\therefore$甲的全距較大 $\therefore$(3)正確

(4) 甲較分散 $\therefore$ 標準差較大 $\therefore$ (4)正確

(5) 變異係數由標準差除以算術平均數所得，而甲的標準差大，平均數小，

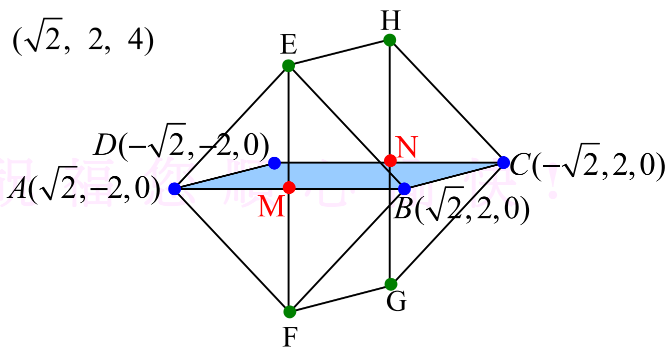
故甲的變異係數較大 $\therefore$ (5)也正確

故選(3)(4)(5)。

6. 設 $(\sqrt{2},\ 2,\ 0)$，$(-\sqrt{2},\ 2,\ 0)$，$(-\sqrt{2},\ -2,\ 0)$，$(\sqrt{2},\ -2,\ 0)$ 爲一正立方體的四個頂點，則下列的哪些點也爲此正立方體的頂點？ <87 數甲>

(A) $(\sqrt{2},\ 0,\ 2)$ (B) $(0,\ 2,\ \sqrt{2})$ (C) $(\sqrt{2},\ 2,\ 4)$

(D) $(\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2})$ (E) $(-\sqrt{2},\ 0,\ -2)$



解：如圖，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=2\sqrt{2}$，

$\Rightarrow A$、B、C、D 爲正方體內部的平面，

且 A、B、C、D 在 $xy\ (z=0)$ 平面上，

$\because A$、B 的中點 $M(\sqrt{2},\ 0,\ 0)$

$\therefore$ E 在 M 的正上方 2 單位

$\Rightarrow E(\sqrt{2},\ 0,\ 2)$，F 在 M 的正下方 2 單位 $\Rightarrow F(\sqrt{2},\ 0,\ -2)$。

$\because C$、D 的中點 $N(-\sqrt{2},\ 0,\ 0)$

$\therefore$ H 在 N 的正上方 2 單位

$\Rightarrow H(-\sqrt{2},\ 0,\ 2)$，G 在 N 的下方 2 單位 $\Rightarrow G(-\sqrt{2},\ 0,\ -2)$。

故選(1)(5)。

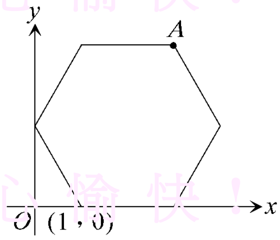
三、填充題

1. 設一線性規畫的可行解區域爲如圖所示之正六邊形內部（含邊界）， <87 數甲>

而目標函數爲 $y-ax$。

若已知 A 點爲此目標函數取得最大值之唯一的點，

則 a 值的範圍要有限制。若以不等式表示，求 a 之範圍。

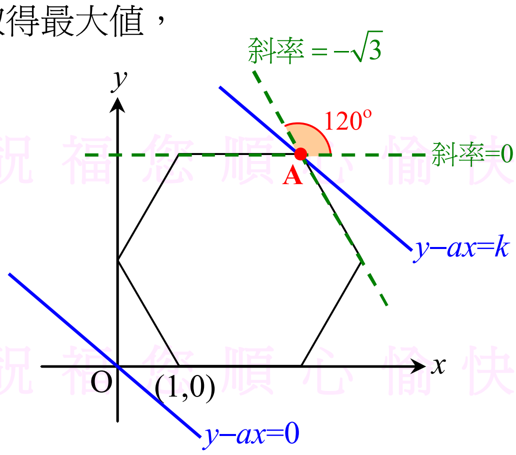


解：令 $y-ax=k \Rightarrow$ 表斜率爲 a 的直線。

由圖知，當直線 $y-ax=k$ 過點 A 時，可取得最大值，

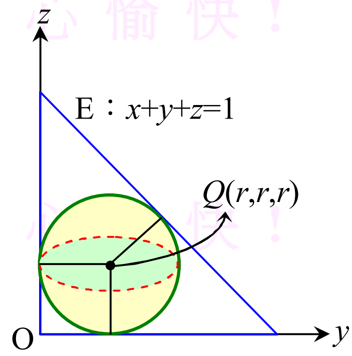
且此時直線斜率 a 須介於 $-\sqrt{3}$ 與 0 之間 。

故所求範圍爲 $-\sqrt{3}<a<0$ 。



2. 求空間中四個平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，E：$x+y+z=1$ 所圍四面體的內切球半徑長。 <87 數甲>

解： 內切球面與三坐標平面均相切，可設球心 Q(r,r,r)，



$\Rightarrow d(\text{球心}Q,E)=r \;\Rightarrow\; \dfrac{|r+r+r-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=r$ ，

$\Rightarrow\; |3r-1|=\sqrt{3}r \Rightarrow\; 3r-1=\pm\sqrt{3}r \Rightarrow\; r=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6},\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$ ，

又 $d(\text{球心}Q,E)<d(\text{原點}O,E)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{6}$ ，故所求 $r=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$ 。

3. 甲、乙兩人各擲一均勻骰子，約定如下：乙得 6 點時乙就贏；兩人同點時（非 6 點），甲贏；其餘情形，則以點數多者為贏。求甲贏的機率。 <87 數甲>

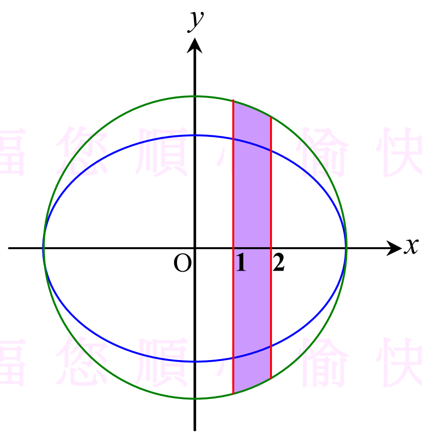
解： 甲、乙兩人各擲一次共有 6×6=36 種，

其中甲贏的情形共有 5+5+4+3+2+1=20 種，如下所示，

故所求 $=\dfrac{20}{36}=\dfrac{5}{9}$ 。

甲	6	5	4	3	2	1
乙	1~5	1~5	1~4	1~3	1~2	1

4. 如圖，圓 $x^2+y^2=16$ 內含一橢圓 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$，設圓內部在兩直線 $x=1$，$x=2$ 之間的面積為 C，而橢圓內部在此兩直線之間的面積為 E，求 $\dfrac{C}{E}=?$ <87 數甲>



解： 如圖，圓 $x^2+y^2=16$ 內含一橢圓 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$，

圓 $x^2+y^2=16 \Rightarrow y=\sqrt{16-x^2}$ (上半部)

橢圓 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \Rightarrow y=\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$ (上半部)

$\Rightarrow\; \dfrac{C}{E}=\dfrac{\int_1^2\sqrt{16-x^2}\,dx}{\frac{3}{4}\int_1^2\sqrt{16-x^2}\,dx}=\dfrac{4}{3}$ 。

5. 用 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ，在 $x=8$ 附近的二次近似（二次泰勒多項式）來求 $\sqrt[3]{7}$ 的近似值， <87 數甲>

則此近似值以分數表示時為__________ 。

解： $f(x)=x^{\frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$，$f''(x)=\dfrac{-2}{9}x^{\frac{-5}{3}}$

$\therefore\; f(8)=2$ ， $f'(8)=\dfrac{1}{12}$ ， $f''(8)=\dfrac{-1}{144}$ ，

二次近似 $P_2(x)=f(8)+\dfrac{f'(8)}{1!}(x-8)+\dfrac{f''(8)}{2!}(x-8)^2$

$\therefore\; \sqrt[3]{7}\approx P_2(7)=2+\dfrac{1}{12}(7-8)-\dfrac{1}{288}(7-8)^2=2-\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{288}=\dfrac{551}{288}$ 。

四、計算題

1. 設 a，b，c 爲正整數，而 b，c 的最大公因數爲 2，且 $(13x+a)^2=(12x+b)^2+(5x+c)^2$ 對任意實數 x 恆成立。求 a，b，c 之值。 <87 數甲>

解：$(12x+b)^2+(5x+c)^2=169x^2+(24b+10c)x+(b^2+c^2)=(13x+a)^2$ 爲完全平方式，

$\therefore$ 判別式 D=0 $\Rightarrow$ $(24b+16c)^2-4\times169\times(b^2+c^2)=0$，

$-100b^2+480bc-576c^2=0$，

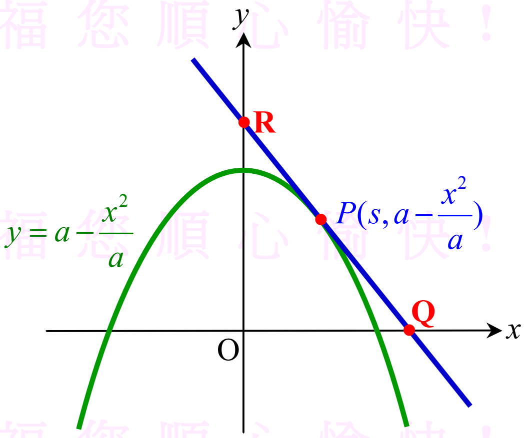
$(10b-24c)^2=0 \Rightarrow 10b=24c \Rightarrow b：c=12：5$ 。

又 $(b，c)=2$ $\therefore \begin{cases} b=24 \\ c=10 \end{cases}$ $\therefore 169x^2+676x+676=(13x+26)^2 \Rightarrow a=26$。

故所求 $a=26$，$b=24$，$c=10$ 。

2. 設 $a>0$，$O(0，0)$ 爲原點。在拋物線 $ay=a^2-x^2$ 上取一點 $P(s，t)$，$s>0$。 <87 數甲>
過 P 點作拋物線之切線，交 x 軸、y 軸於 Q、R 兩點。當 P 點變動時，
$\triangle OQR$ 面積的最小值爲何？

解：令 $y=f(x)=a-\dfrac{x^2}{a} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2}{a}x$



$\Rightarrow$ 切線(直線 RQ)斜率 $=f'(s)=\dfrac{-2}{a}s$ ，

則 $\overleftrightarrow{RQ}：y-(a-\dfrac{x^2}{a})=\dfrac{-2}{a}s(x-s)$

當 $x=0 \Rightarrow y=a+\dfrac{s^2}{a} \Rightarrow R(0,\ a+\dfrac{s^2}{a})$

當 $y=0 \Rightarrow x=\dfrac{a^2+s^2}{2s} \Rightarrow R(\dfrac{a^2+s^2}{2s},\ 0)$

$$\Rightarrow \Delta ORQ=\frac{1}{2}(a+\frac{s^2}{a})(\frac{a^2+s^2}{2s})=\frac{1}{4a}\cdot\frac{(a^2+s^2)^2}{s}=\frac{1}{4a}(\frac{a^4}{s}+2a^2s+s^3)$$

令 $f(s)=\dfrac{1}{4a}(a^4s^{-1}+2a^2s+s^3)$

$$\Rightarrow f'(s)=\frac{1}{4a}(-a^4s^{-2}+2a^2+3s^2)=\frac{1}{4as^2}(-a^4+2a^2s^2+3s^4)=\frac{1}{4as^2}(3s^2-a^2)(s^2+a^2)$$

若 $f'(s)=0 \Rightarrow s=\pm\dfrac{a}{\sqrt{3}}$(負不合)

故所求最小值 $=f(\dfrac{a}{\sqrt{3}})=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}a^2$ 。

s		$\dfrac{a}{\sqrt{3}}$	
$f'(s)$	$-$	0	$+$
增減	↘		↗
$f(s)$		$\dfrac{4\sqrt{3}}{9}a^2$	