<< 86 學測：數學科 >>

一、單選題

1. 坐標平面上兩直線之斜率分別爲 $\sqrt{3}$ 及 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，則下列何者爲其一交角？ <86 學測>

(1) 30° (2) 36° (3) 45° (4) 60° (5) 90°

解： 令兩直線方向向量分爲 $\overrightarrow{d_1}=(1,\ \sqrt{3})$，$\overrightarrow{d_2}=(\sqrt{3},\ 1)$，

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}}{|\overrightarrow{d_1}||\overrightarrow{d_2}|}=\frac{1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times 1}{2\times 2}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ$$

$\Rightarrow$ 所求交角爲 30° 或 150°，**故選(1)**。

2. 設 P，Q 爲平面 $ax+by+cz=5$ 上相異兩點，且 $\overrightarrow{PQ}=(x_0,\ y_0,\ z_0)$，則 $\overrightarrow{PQ}\cdot(a,\ b,\ c)$ 爲

(1) 不定値，隨 (x_0，y_0，z_0) 而改變 (2) 25 (3) 5 (4) 0 (5) -1 <86 學測>

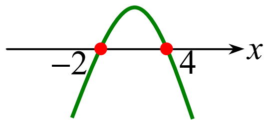
解： $\overrightarrow{PQ}$ 與向量 $(a,\ b,\ c)$ 垂直 $\Rightarrow \overrightarrow{PQ}\cdot(a,\ b,\ c)=0$，**故選(4)**。

3. 設 $f(x)$ 爲二次函數，且不等式 $f(x)>0$ 之解爲 $-2<x<4$，則 $f(2x)<0$ 之解爲 <86 學測>

(1) $-1<x<2$ (2) $x<-1$ 或 $x>2$ (3) $x<-2$ 或 $x>4$ (4) $-4<x<8$ (5) $x<-4$ 或 $x>8$

解： $-2<x<4 \Leftrightarrow (x+2)(x-4)<0$

令 $f(x)=-(x+2)(x-4)$，則 $f(x)>0$ 的解爲 $-2<x<4$。



$\Rightarrow f(2x)=-(2x+2)(2x-4)$

則 $f(2x)<0 \Rightarrow -(2x+2)(2x-4)<0$

$\Rightarrow (x+1)(x-2)>0$，故所求 $x>2$ 或 $x<-1$。**故選(2)**。

4. 有一個無窮等比級數，其和爲 $\dfrac{8}{9}$，第四項爲 $\dfrac{3}{32}$，已知公比爲一有理數， <86 學測>

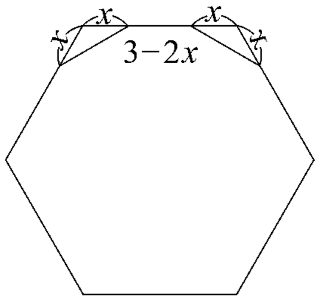
則當公比以最簡分數表示時，其分母爲 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 6 (5) 8

解： $\begin{cases}\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{8}{9}\cdots\cdots① \\ ar^3=\dfrac{3}{32}\cdots\cdots②\end{cases}$，由 $\dfrac{①}{②}$ 得 $\dfrac{1}{r^3(1-r)}=\dfrac{256}{27}\Rightarrow r=\dfrac{3}{4}$， 所求分母爲 4。**故選(3)**。

注意： 無窮等比級數$(r\neq 1)$，$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\begin{cases}=\dfrac{a(1-0)}{1-r}=\dfrac{a}{1-r}, & 當\ |r|<1 \\ 發散, & 當\ |r|>1\end{cases}$。

5. 有一邊長為 3 的正六邊形紙板，今在每一個角各剪掉一個小三角形，使其成為正十二邊形之紙板，則此正十二邊形之一邊長為 <86 學測>

(1) 1　(2) $\frac{3}{2}$　(3) $\sqrt{3}$　(4) $\frac{3\sqrt{3}-3}{3}$　(5) $6\sqrt{3}-9$



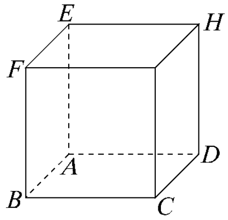
解：如圖，設小三角形腰長 x，則正十二邊形邊長為 $3-2x$，

$\therefore$ $(3-2x)^2 = x^2 + x^2 - 2\bullet x\bullet x\bullet \cos 120°$，

$\Rightarrow$ $x^2 - 12x + 9 = 0$ $\Rightarrow$ $x = 6-3\sqrt{3}$，

$\therefore$ 正十二邊形邊長 $=3-2(6-3\sqrt{3})=6\sqrt{3}-9$。**故選(5)**。

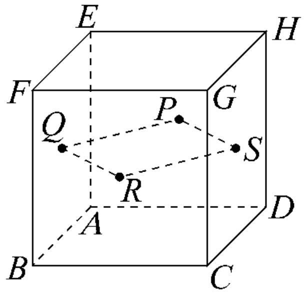
6. 有一正立方體，其邊長都是 1，如果向量 $\overrightarrow{a}$ 的起點與終點都是此正立方體的頂點，且 $|\overrightarrow{a}|=1$，則共有多少個不相等的向量 $\overrightarrow{a}$？ (1) 3　(2) 6　(3) 12　(4) 24　(5) 28 <86 學測>



解：如圖，共有 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{EA}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{DA}$ 六種。（即前後、左右、上下各 2 個）。**故選(2)**。

7. 考慮一正立方體六個面的各中心點，則以其中四個中心點為頂點的正方形一共有幾個？

(1) 3　(2) 4　(3) 6　(4) 8　(5) 12 <86 學測>



解：六中心點可形成之正方形共有 3 個，

如 P，Q，R，S，為前後、左右之中心形成的，

尚有上下、左右，及上下、左右共 3 個。

故選(1)。

8. 有一種丟銅板的遊戲，其規則為：出現正面的則繼續丟，出現反面就出局，那麼連續丟 5 次後還可繼續丟的機率為 $(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$。某班有 40 名學生，每人各玩一局，設班上至少有一人連續丟 5 次後還可繼續丟的機率為 p，則 <86 學測>

(1) $0.4 \le p < 0.5$　(2) $0.5 \le p < 0.6$　(3) $0.6 \le p < 0.7$　(4) $0.7 \le p < 0.8$　(5) $0.8 \le p < 0.9$

解：連續丟 5 次後還可繼續丟(正正正正正)的機率為 $(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$。

不能連續丟 5 次後再繼續之機率為 $1-(\frac{1}{2})^5 = \frac{31}{32}$，

班上至少有 1 人 = 全 −(40 人皆沒有) $\Rightarrow p = 1-(\frac{31}{32})^{40}$，

又 $\log(\frac{31}{32})^{40} = 40\ (\boxed{\log 31} - \log 32) = 40\ (\boxed{1.4914} - 1.5051)$ (查表)

$= -0.548 = -1 + 0.452 = \log[(2.\ldots)\times 10^{-1}] = \log(0.2\ldots)$，

$\therefore p = 1-(\frac{31}{32})^{40} = 1-(0.2\cdots) = 0.7\cdots$，**故選(4)**。

二、多重選擇題

9. 設 $f(x)=\sum_{n=1}^{3}(x-n)^2+\sum_{n=8}^{10}(x-n)^2$，若 $f(x)$ 在 $x=a$ 處有最小值，則 <86 學測>

(1) a 爲整數　(2) $a>5.1$　(3) $a<5.9$　(4) $|a-4|<0.5$　(5) $|a-6|<0.5$

解： $f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2+(x-8)^2+(x-9)^2+(x-10)^2$

$$=6x^2-66x+259=6(x-\frac{11}{2})^2+\frac{397}{2}$$

$\therefore$ $x=5.5=a$ 時，$f(x)$ 有最小值，**故選(2)(3)**。

注意： 若 $f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$，當 $x=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，$f(x)$ 有最小值。

例：$f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2+(x-8)^2+(x-9)^2+(x-10)^2$，

$\Rightarrow$ $x=\dfrac{1+2+3+8+9+10}{6}=\dfrac{33}{6}=\dfrac{11}{2}$，$f(x)$ 有最小值。

10. 關於方程式 $\left|\dfrac{3x+y-19}{\sqrt{10}}\right|=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$ 所代表的錐線圖形 Γ，下列何者爲真？

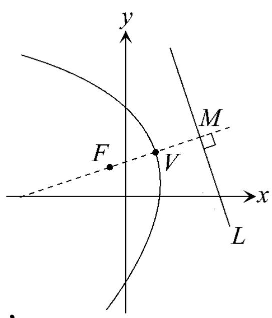
(1) Γ 爲拋物線 <86 學測>

(2) $(1, 2)$ 爲 Γ 的焦點

(3) $3x+y-19=0$ 爲 Γ 的漸近線

(4) $x-3y+7=0$ 爲 Γ 的對稱軸

(5) $(3, 1)$ 爲 Γ 的頂點



解： 令 $P(x, y)$，直線 L：$3x+y-19=0$，$F(-1, 2)$，

$\left|\dfrac{3x+y-19}{\sqrt{10}}\right|=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}\Rightarrow d(P, L)=\overline{PF}$，

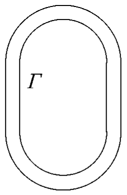
即 Γ 是以 L 爲準線，F 爲焦點之拋物線，

又對稱軸爲 $x-3y+7=0$，解 $\begin{cases}x-3y+7=0\\3x+y-19=0\end{cases}\Rightarrow$ 交點 $M(5, 4)$，

頂點 V 即 $\overline{FM}$ 之中點 $(2, 3)$，**故選(1)(4)**。

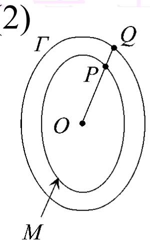
11. 下列各選項中的曲線Γ，何者是一個橢圓？ <86 學測>

(1)



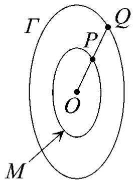
Γ 爲標準跑道的內側

(2)



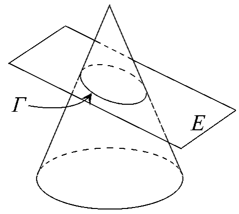
Γ 爲 Q 點的軌跡，其中 $\overline{PQ}=1$，P 爲橢圓 M 上任一點，O 爲 M 的中心且 O、P、Q 三點共線

(3)



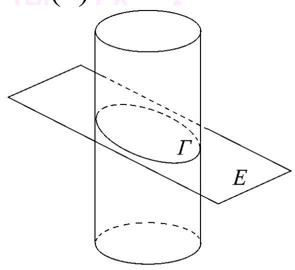
Γ 爲 Q 點的軌跡，其中 $\overline{PQ}=\overline{OP}$，$P$ 爲橢圓 M 上任一點，O 爲 M 的中心且 O、P、Q 三點共線

(4)



Γ 爲直圓錐面與平面的交線

(5)



Γ 爲直圓柱面與平面的交線

解：(1) 標準跑道的內側爲兩線段接兩半圓，故不爲橢圓。

(2) 沿橢圓 M，以直徑 1 之圓形滾動一周，所形成區域的外邊界即爲 Q 之圖形，故其不爲橢圓。

(3) 令 $M:\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1\ (a>b>0)$

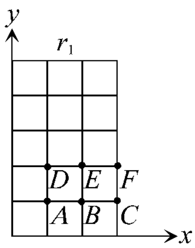
$P\in M$，設 $P(x,y)$，則 $Q(u,v)$，且 $Q(u,v)=(2x,2y)$，

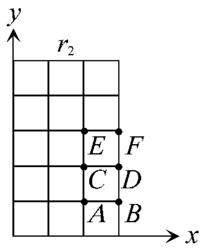
$$\Rightarrow (x,y)=(\frac{u}{2},\frac{v}{2})\ \Rightarrow \frac{(\frac{u}{2})^2}{b^2}+\frac{(\frac{v}{2})^2}{a^2}=1\ \Rightarrow \frac{u^2}{4b^2}+\frac{v^2}{4a^2}=1\ \Rightarrow Q(u,v)$$ 滿足橢圓方程式。

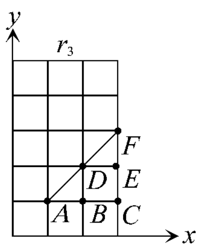
(4)(5) 均爲橢圓。

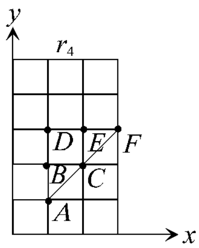
故選(3)(4)(5)。

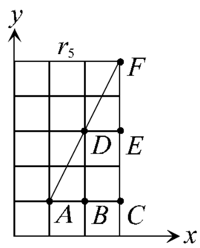
12. 下圖中，有五組數據，每組各有 A，B，C，D，E，F 等六個資料點 <86 學測>











設各組的相關係數由左至右分別爲 r_1，r_2，r_3，r_4，r_5，則下列關係式何者爲真？

(1) $r_1=r_2$　(2) $r_2<r_3$　(3) $r_3>r_4$　(4) $r_3<r_5$　(5) $r_4=r_5$

解：由圖知 r_1 與 r_2 均表上下與左右均對稱的資料 $\Rightarrow r_1=r_2=0$。

令 r_3 表變數 X 與 Y 之相關係數，

則 r_4 表變數 Y 與 X 之相關係數(即 r_3 之 X、Y 互換所得)，

則 r_5 表變數 X 與 2Y 之相關係數。

$\Rightarrow r_3=r_4=r_5$ 。

所以 $r_1=r_2<0<r_3=r_4=r_5$ ，**故選(1)(2)(5)。**

三、填充題

13. 設 $f(x)=x^5+6x^4-4x^3+25x^2+30x+20$，則 $f(-7)=$＿＿＿＿＿。 <86 學測>

解： $f(-7)=f(x)$ 除以 $(x+7)$ 所得之餘式。

如右所示，由綜合除法得 $f(-7)=6$。

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & +6 & -4 & +25 & +30 & +20 & -7 \\ & -7 & +7 & -21 & -28 & -14 & \\ \hline 1 & -1 & +3 & +4 & +2 & +6 & \end{array}$$

14. 設 θ 為兩平面 $2x-y+2z=6$ 與 $3x-4z=2$ 的夾角（取銳角）， <86 學測>

則 θ 最接近的整數度數為＿＿＿＿。

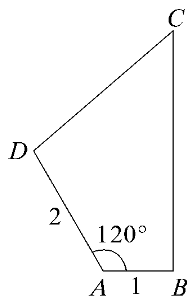
解： 令 $\overrightarrow{n_1}=(2,\ -1,\ 2)$，$\overrightarrow{n_2}=(3,\ 0,\ -4)$，

$$\Rightarrow \cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right|(\text{銳角取正值})=\left|\frac{(2,\ -1,\ 2)\cdot(3,\ 0,\ -4)}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{9+0+16}}\right|=\frac{2}{3\times 5}=0.1333\cdots,$$

查表得 $\sin 7°40'=0.1334$，即 $\cos 82°20'=0.1334$， 故 θ 最接近 $82°$。

15. 在四邊形 $ABCD$ 中，$\angle A=120°$，$\overline{AB}=1$，$\overline{AD}=2$，且 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$， <86 學測>

則 $\overline{AC}$ 的長度為＿＿＿＿＿。



解： $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1\times 2\times\cos 120°=-1$，

$|\overrightarrow{AC}|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=(3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD})\cdot(3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD})$

$=9|\overrightarrow{AB}|^2+12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+4|\overrightarrow{AD}|^2=9-12+16=13$。

$\Rightarrow|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{13}$。

16. 已知三角形由三直線 $y=0$，$3x-2y+3=0$，$x+y-4=0$ 所圍成， <86 學測>

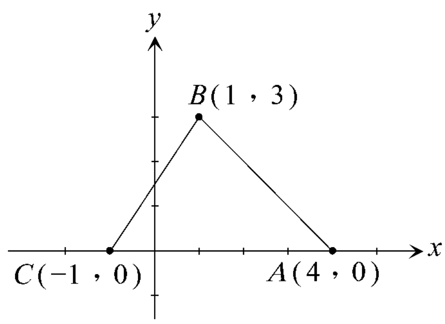
則其外接圓之直徑為＿＿＿。

解： 如圖，$y=0$，$3x-2y+3=0$，$x+y-4=0$ 交於 A(4, 0)，B(1, 3)，C(−1, 0)，

$\Rightarrow\overline{BC}=\sqrt{13}$，$\overline{BA}=3\sqrt{2}$，$\overline{AC}=5$，$\angle ABC=\theta$，

$$\Rightarrow\cos\theta=\frac{13+18-5^2}{2\times\sqrt{13}\times 3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{26}}\Rightarrow\sin\theta=\frac{5}{\sqrt{26}}$$

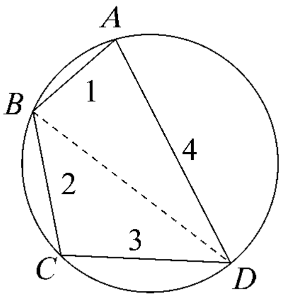
$$\Rightarrow 2R=\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=\sqrt{26}$$。



17. 已知圓內接四邊形的各邊長為 $\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，$\overline{DA}=4$ ， <86 學測>

則對角線 $\overline{BD}$ 的長度為______。

解：令 $\angle BCD=\theta \quad \Rightarrow \quad \angle BAD=\pi-\theta$，



ΔCBD 中， $\cos\theta=\dfrac{2^2+3^2-\overline{BD}^2}{2\times2\times3}$

ΔABD 中， $\cos(\pi-\theta)=\dfrac{1^2+4^2-\overline{BD}^2}{2\times1\times4}=-\cos\theta$

$\Rightarrow \dfrac{1^2+4^2-\overline{BD}^2}{2\times1\times4}=-\cos\theta=-\dfrac{2^2+3^2-\overline{BD}^2}{2\times2\times3}$ $\Rightarrow$ 解得 $\overline{BD}=\sqrt{\dfrac{77}{5}}$ 。

18. 將 3^{100} 以科學記號表示：$3^{100}=a\times10^m$，其中 $1\le a<10$，m 為整數， <86 學測>

則 a 的整數部分為______ 。

解：$\log a\times10^m=100\times\log 3=100\times0.4771=47.71=47+0.71$，

又 $\log a=0.71$ 且 $0.6990=\log 5<\log a<\log 6=0.7781$，

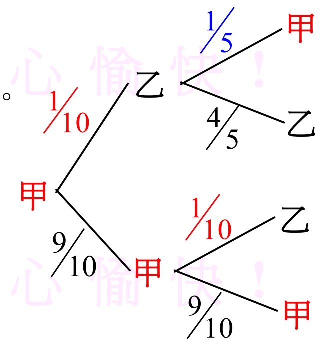
$\Rightarrow a=5\ldots$，所以 a 的整數部分為 5。

19. 某人上班有甲、乙兩條路線可供選擇，早上定時從家裡出發，走甲路線有 $\dfrac{1}{10}$ 的機率

會遲到，走乙路線則有 $\dfrac{1}{5}$ 的機會遲到。無論走哪一條路線，只要不遲到，

下次就走同一條路線，否則就換另一條路線。

假設他第一天走甲路線，則第三天也走甲路線的機率為______ 。



解：如圖，第三天也走甲路線之機率

$=\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{9}{10}\times\dfrac{9}{10}=\dfrac{83}{100}$ 。

20. 有一種遊戲，每次輸贏規則如下：先從 1 至 6 中選定一個號碼 n，再擲三粒均勻的骰子，若三粒骰子的點數全是 n，則可贏 3 元；恰有兩個點數為 n，則可贏 2 元；恰有一個點數為 n，則可贏 1 元；而沒有點數為 n，則輸 1 元，如此，

玩一次的期望值（贏為正，輸為負）為__________元。

解：機率分配如下所示，

金額(元)	3	2	1	−1
機率	$\dfrac{1\times1\times1}{6\times6\times6}$	$\dfrac{1\times1\times5}{6\times6\times6}\times C^3_2$	$\dfrac{1\times5\times5}{6\times6\times6}\times C^3_1$	$\dfrac{5\times5\times5}{6\times6\times6}$

故所求期望值 $=3\times\dfrac{1}{216}+2\times\dfrac{15}{216}+1\times\dfrac{75}{216}+(-1)\times\dfrac{125}{216}=\dfrac{-17}{216}$ (元)。