

100 年 數學科 學科能力測驗

一、單選題（占 30 分）

1. 有一箱子，內有 3 黑球與 2 白球。有一遊戲，從箱子中任取出一球。假設每一顆球被取出的機率都相同，若取出黑球可得獎金 50 元，而取出白球可得獎金 100 元，則下列哪一個選項是此遊戲的獎金期望值？ (1) 70 元 (2) 75 元 (3) 80 元 (4) 85 元 (5) 90 元

1. **解：**機率分配如下所示，故所求期望值 $= 50 \times \frac{3}{5} + 100 \times \frac{2}{5} = 30 + 40 = 70$ 元。故選(1)。

金額(元)	50	100
機率	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

2. 多項式 $4(x^2+1)+(x+1)^2(x-3)+(x-1)^3$ 等於下列哪一個選項？

(1) $x(x+1)^2$ (2) $2x(x-1)^2$ (3) $x(x-1)(x+1)$ (4) $2(x-1)^2(x+1)$ (5) $2x(x-1)(x+1)$

2. **解：**原式 $= (4x^2+4) + (x^2+2x+1)(x-3) + (x^3-3x^2+3x-1)$
 $= (4x^2+4) + (x^3-3x^2+2x^2-6x+x-3) + (x^3-3x^2+3x-1)$
 $= 2x^3-2x = 2x(x^2-1) = 2x(x+1)(x-1)$ ，故選(5)。

3. 設 $(a_{n+1})^2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(a_n)^2$ ， n 為正整數，且知 a_n 皆為正。令 $b_n = \log a_n$ ，則數列 $b_1, b_2, b_3, \dots$ 為

(1) 公差為正的等差數列 (2) 公差為負的等差數列 (3) 公比為正的等比數列
(4) 公比為負的等比數列 (5) 既非等差亦非等比數列

3. **解：** $(a_{n+1})^2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(a_n)^2 \Rightarrow \log(a_{n+1})^2 = \log\left[\frac{1}{\sqrt{10}}(a_n)^2\right]$
 $\Rightarrow 2\log(a_{n+1}) = \log\frac{1}{\sqrt{10}} + \log(a_n)^2 = \log(10^{-\frac{1}{2}}) + 2\log(a_n)$
 $\Rightarrow 2\log(a_{n+1}) = -\frac{1}{2} + 2\log(a_n) \Rightarrow 2b_{n+1} = -\frac{1}{2} + 2b_n \Rightarrow b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{4}$ 。故選(2)。

4. 坐標平面上滿足方程式 $\left(\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2}\right)\left(\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2}\right) = 0$ 的點 (x, y) 所構成的圖形為

(1) 只有原點 (2) 橢圓及原點 (3) 兩條相異直線 (4) 橢圓及雙曲線 (5) 雙曲線及原點

4. **解：** $\left(\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2}\right)\left(\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2}\right) = 0$ 或 $\left(\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2}\right) = 0$

$\Rightarrow x = 0, y = 0$ 或 $\frac{x^2}{3^2} = \frac{y^2}{4^2} \Rightarrow x = 0, y = 0$ 或 $4x \pm 3y = 0 \Rightarrow 4x \pm 3y = 0$ ，故選(3)。

5. 請問下面哪一個選項是正確的？

- (1) $3^7 < 7^3$ (2) $5^{10} < 10^5$ (3) $2^{100} < 10^{30}$ (4) $\log_2 3 = 1.5$ (5) $\log_2 11 < 3.5$

5. 解：(1) $7^3 = 343 < 729 = 3^6 < 3^7 \Rightarrow 3^7 > 7^3$ 。

(2) $\log 5^{10} = 10 \log 5 = 10(1 - \log 2) \approx 10(1 - 0.3010) > 5 = \log 10^5 \Rightarrow 5^{10} > 10^5$ 。

(3) $\log 2^{100} = 100 \log 2 = 100 \times \log 2 \approx 100 \times 0.3010 > 30 = \log 10^{30} \Rightarrow 2^{100} > 10^{30}$ 。

(4) $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \approx \frac{4771}{3010} > 1.5 \Rightarrow \log_2 3 \neq 1.5$ 。

(5) $2^{3.5} = 2^{\frac{7}{2}} = (2^7)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{128} > 11 \Rightarrow 2^{3.5} > 11 \Rightarrow 3.5 > \log_2 11$ 。故選(5)。

6. 根據台灣壽險業的資料，男性從 0 歲、1 歲、...到 60 歲各年齡層的死亡率(單位：%)依序為

1.0250, 0.2350, 0.1520, 0.1010, 0.0720, 0.0590, 0.0550, 0.0540, 0.0540, 0.0520, 0.0490, 0.0470, 0.0490, 0.0560, 0.0759, 0.1029, 0.1394, 0.1890, 0.2034, 0.2123, 0.2164, 0.2166, 0.2137, 0.2085, 0.2019, 0.1948, 0.1882, 0.1830, 0.1799, 0.1793, 0.1813, 0.1862, 0.1941, 0.2051, 0.2190, 0.2354, 0.2539, 0.2742, 0.2961, 0.3202, 0.3472, 0.3779, 0.4129, 0.4527, 0.4962, 0.5420, 0.5886, 0.6346, 0.6791, 0.7239, 0.7711, 0.8229, 0.8817, 0.9493, 1.0268, 1.1148, 1.2139, 1.3250, 1.4485, 1.5851, 1.7353。經初步整理後，已知 61 個資料中共有 24 個資料小於 0.2。

請問死亡率資料的中位數為下列哪一個選項？

- (1) 0.2034 (2) 0.2164 (3) 0.2137 (4) 0.2085 (5) 0.2019

6. 解：由小到大的前 24 項($a_1 \sim a_{24}$)皆小於 0.2，且 $a_{25} \geq 0.2$ ，

又大於 0.2 的有：0.2350, 0.2034, 0.2123, 0.2164, 0.2166,

0.2137, 0.2085, 0.2019, 0.2051, 0.2190，

故由小到大第 31 項之中位數 $a_{31} = 0.2164$ ，故選(2)。

二、多選題 (占 35 分)

7. 設 O 、 A 、 B 分別為複數平面上代表 0、 $1+i$ 、以及 $1-i$ 的點。請問下列哪些選項所對應的點落在 $\triangle OAB$ 的內部？

- (1) $\cos 60^\circ$ (2) $\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ$ (3) $\frac{4-3i}{5}$ (4) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ (5) $(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^{25}$

7. 解： $1+i \Rightarrow (1, 1) \Rightarrow \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$ ；

$1-i \Rightarrow (1, -1) \Rightarrow \cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ)$ ，如圖所示。

(1) $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow (\frac{1}{2}, 0) \Rightarrow$ 在 $\triangle OAB$ 的內部。

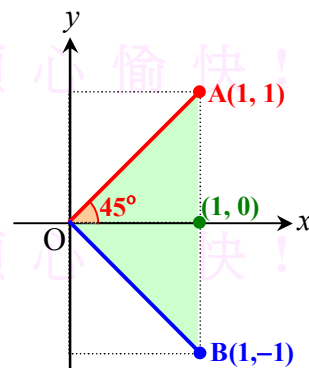
(2) $\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ \Rightarrow$ 在 $\triangle OAB$ 的外部。

(3) $\frac{4-3i}{5} \approx \cos(-37^\circ) + i \sin(-37^\circ) \Rightarrow$ 在 $\triangle OAB$ 的內部。

(4) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ \Rightarrow$ 在 $\triangle OAB$ 的外部。

(5) $(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^{25} = \cos 750^\circ + i \sin 750^\circ = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ \Rightarrow$ 在 $\triangle OAB$ 的內部。

故選(1)(3)(5)。



8. 已知 $\sin \theta = -\frac{2}{3}$ 且 $\cos \theta > 0$ ，請問下列哪些選項是正確的？

- (1) $\tan \theta < 0$ (2) $\tan^2 \theta > \frac{4}{9}$ (3) $\sin^2 \theta > \cos^2 \theta$ (4) $\sin 2\theta > 0$
 (5) 標準位置角 θ 與 2θ 的終邊位在不同的象限

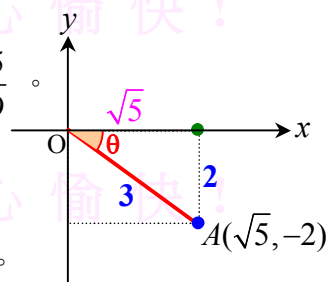
8. 解： $\sin \theta = -\frac{2}{3}$ ，且 $\cos \theta > 0 \Rightarrow \theta$ 為第四象限角，且 $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ，如圖。

- (1) $\tan \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}} < 0$ 。 (2) $\tan^2 \theta = \frac{4}{5} > \frac{4}{9}$ 。 (3) $\sin^2 \theta = \frac{4}{9} < \cos^2 \theta = \frac{5}{9}$ 。

(4) $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{-2}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{-4\sqrt{5}}{9} < 0$ 。

(5) $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9} > 0$ ，又 $\sin 2\theta < 0 \Rightarrow \theta$ 為第四象限角。

故選(1)(2)。



9. 考慮坐標平面上以 $O(0,0)$ 、 $A(3,0)$ 、 $B(0,4)$ 為頂點的三角形，令 C_1 、 C_2 分別為 $\triangle OAB$ 的外接圓、內切圓。請問下列哪些選項是正確的？

- (1) C_1 的半徑為 2 (2) C_1 的圓心在直線 $y = x$ 上 (3) C_1 的圓心在直線 $4x + 3y = 12$ 上
 (4) C_2 的圓心在直線 $y = x$ 上 (5) C_2 的圓心在直線 $4x + 3y = 6$ 上

9. 解： $\triangle OAB$ 為直角三角形，外心為 $\overline{AB}$ 中點 $(\frac{3}{2}, 2)$ ，
 內心在 $(1, 1)$ $\because 3 + 4 = 5 + 2r \Rightarrow r = 1$ ，如圖。

(1) 外接圓半徑 $= \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{5}{2}$ 。

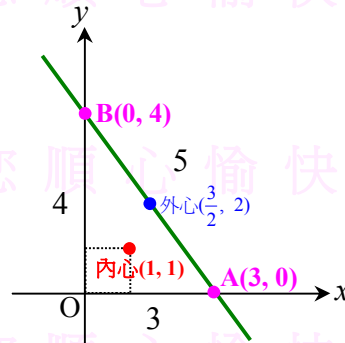
(2) 外心 $(\frac{3}{2}, 2)$ 不在直線 $y = x$ 上。

(3) 外心 $(\frac{3}{2}, 2)$ 在 $\overleftrightarrow{AB} : \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ ，即 $4x + 3y = 12$ 上。

(4) 內心 $(1, 1)$ 在直線 $y = x$ 上。

(5) 內心 $(1, 1)$ 不在直線 $4x + 3y = 6$ 上。

故選(3)(4)。



10. 坐標平面中，向量 $\vec{v}$ 與向量 $\vec{w} = (2, \sqrt{5})$ 互相垂直且等長。請問下列哪些選項是正確的？

- (1) 向量 $\vec{w}$ 必為 $(\sqrt{5}, -2)$ 或 $(-\sqrt{5}, 2)$
- (2) 向量 $\vec{v} + \vec{w}$ 與 $\vec{v} - \vec{w}$ 等長
- (3) 向量 $\vec{v} + \vec{w}$ 與 $\vec{w}$ 的夾角可能為 135°
- (4) 若向量 $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$ ，其中 a, b 為實數，則向量 $\vec{u}$ 的長度為 $\sqrt{a^2 + b^2}$
- (5) 若向量 $(1, 0) = c\vec{v} + d\vec{w}$ ，其中 c, d 為實數，則 $c > 0$

10. 解： $\vec{v} = (2, \sqrt{5})$ ， $\vec{v} \perp \vec{w}$ 且 $|\vec{v}| = |\vec{w}| \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ 且 $|\vec{v}| = |\vec{w}| = 3$ ，

(1) $\vec{v} = (2, \sqrt{5})$ ， $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ 且 $|\vec{v}| = |\vec{w}| = 3 \Rightarrow \vec{w} = (\sqrt{5}, -2)$ 或 $(-\sqrt{5}, 2)$ 。

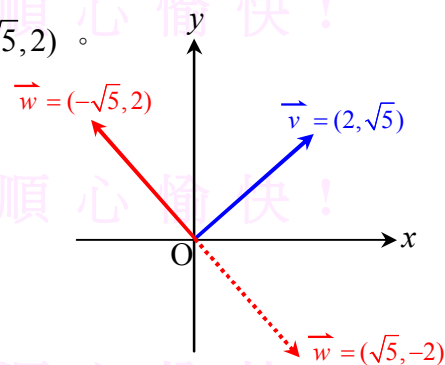
(2) $|\vec{v} + \vec{w}| = |\vec{v} - \vec{w}| \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ 。

(3) $\vec{w} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{w} = 0 + 9 = 9 > 0 \Rightarrow$ 夾角 θ 為銳角。

(4) $|\vec{u}|^2 = |a\vec{v} + b\vec{w}|^2 = a^2|\vec{v}|^2 + 2ab\vec{v} \cdot \vec{w} + b^2|\vec{w}|^2 = 9a^2 + 9b^2$

$$\Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{9a^2 + 9b^2}。$$

(5) $\vec{v} \cdot (c\vec{v} + d\vec{w}) = c\vec{v} \cdot \vec{v} + d\vec{v} \cdot \vec{w} = c\vec{v} \cdot \vec{v} = 9c$ ，又 $(2, \sqrt{5}) \cdot (1, 0) = 2 \Rightarrow 9c = 2 \Rightarrow c = \frac{2}{9}$ 。



故選(1)(2)(5)。

11. 在坐標平面上，圓 C 的圓心在原點且半徑為 2，已知直線 L 與圓 C 相交，請問 L 與下列哪些圖形一定相交？

- (1) x 軸
- (2) $y = (\frac{1}{2})^x$
- (3) $x^2 + y^2 = 3$
- (4) $(x-2)^2 + y^2 = 16$
- (5) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

11. 解：圓 $C : x^2 + y^2 = 4$ ，

(1) $L : y = -2$ 與 x 軸不相交，如圖。

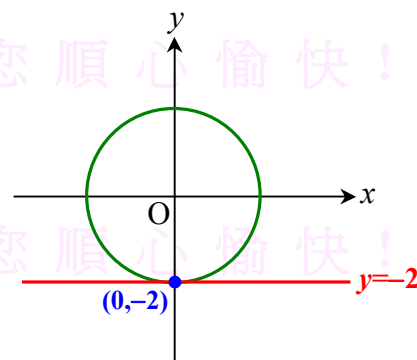
(2) 若 $L : y = -2$ 與 $y = (\frac{1}{2})^x$ (圖形在 x 軸上方) 不相交。

(3) $L : y = -2$ 與圓 $x^2 + y^2 = 3$ (半徑 $\sqrt{3}$) 不相交。

(4) 圓 $x^2 + y^2 = 4$ ，在圓 $(x-2)^2 + y^2 = 16$ 內部

$$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 16 \text{ 與 } L \text{ 必相交。}$$

(5) 圓 $x^2 + y^2 = 4$ ，在橢圓 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 內部 $\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 與 L 必相交。



故選(4)(5)。

12. 坐標空間中，考慮球面 $S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$ 與 $A(1,0,0)$ 、 $B(-1,0,0)$ 兩點。

請問下列哪些選項是正確的？

- (1) 原點在球面 S 上 (2) A 點在球面 S 之外部 (3) 線段 $\overline{AB}$ 與球面 S 相交
(4) A 點為直線 AB 上距離球心最近的點
(5) 球面 S 和 xy, yz, xz 平面分別截出的三個圓中，以與 xy 平面所截的圓面積為最大

12. 解： $S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14 \Rightarrow$ 球心 $Q(1, 2, 3)$ ，半徑 $r = \sqrt{14}$ ，

(1) 原點 $O(0, 0, 0)$ 滿足 $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14 \Rightarrow$ 原點在球面上。

(2) $\overline{AQ} = \sqrt{(1-1)^2 + (0-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{13} < \text{球半徑} \sqrt{14} \Rightarrow A$ 在球面內部。

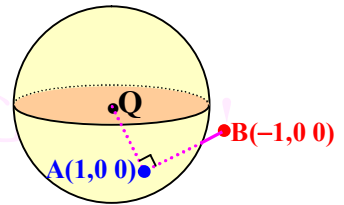
(3) $\overline{BQ} = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{17} > \text{球半徑} \sqrt{14}$

$\Rightarrow B$ 在球面外部 $\Rightarrow \overline{AB}$ 與球面相交。

(4) $\overrightarrow{AQ} = (0, 2, 3)$ ， $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, 0) \Rightarrow \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AQ} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow Q$ 與 $\overline{AB}$ 的最近點為 A ，如圖。

(5) $Q(1, 2, 3)$ 與 xy, yz, xz 平面的距離分別為 $3, 1, 2 \Rightarrow Q$ 與 yz 平面距離最小，故截圓最大。

故選(1)(3)(4)。



13. 設 $f(x) = x(x-1)(x+1)$ ，請問下列哪些選項是正確的？

(1) $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) > 0$ (2) $f(x) = 2$ 有整數解 (3) $f(x) = x^2 + 1$ 有實數解

(4) $f(x) = x$ 有不等於零的有理數解 (5) 若 $f(a) = 2$ ，則 $f(-a) = 2$

13. 解： $f(x) = x(x-1)(x+1) = x(x^2-1) = x^3 - x$ ，

(1) $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}-1)(\frac{1}{\sqrt{2}}+1) < 0$ 。

(2) $f(x) = 2 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 2 \Rightarrow x^3 - x - 2 = 0 \Rightarrow$ 有理根必為 $1, -1, 2, -2$ (檢驗皆不合)
 $\Rightarrow f(x) = 2$ 無整數解。

(3) $f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$ 為實係數三次方程式 $\Rightarrow$ 必有一實根 (虛根必共軛)。

(4) $f(x) = x \Rightarrow x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm\sqrt{2}$ 。

(5) $f(a) = a^3 - a \Rightarrow f(-a) = (-a)^3 - (-a) = -(a^3 - a) = -f(a)$ 。

故選(3)。

A. 已知首項為 a 、公比為 r 的無窮等比級數和等於 5；首項為 a 、公比為 $3r$ 的無窮等比級數和等於 7，

A. 解:
$$\begin{cases} \frac{a}{1-r}=5 \\ \frac{a}{1-3r}=7 \end{cases} \Rightarrow \frac{1-3r}{1-r}=\frac{5}{7} \Rightarrow r=\frac{1}{8} \Rightarrow a=\frac{35}{8} \Rightarrow \text{所求}=\frac{a}{1-2r}=\frac{\frac{35}{8}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{35}{6}。$$

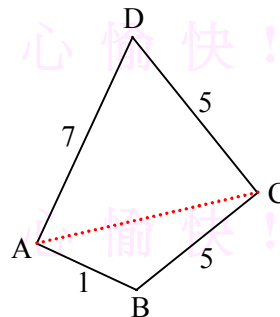
已知 $\cot \angle AEB = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ ，則 $\cot \angle CED = \frac{\textcircled{17}}{\textcircled{18}}$ 。

如圖，令 $\overline{AB}=5$ ， $\overline{BE}=2\sqrt{6} \Rightarrow \overline{CE}=\sqrt{25+24}=7$

爲 $\frac{(19)(20)}{111}$ 。橋高中數學科祝福您順心愉快！

$$\Rightarrow \text{所求} = \frac{C_2^{20} \times C_1^{15}}{C_3^{35}} + \frac{C_1^{20} \times C_2^{15}}{C_3^{35}} = \frac{19 \times 10 \times 15 + 20 \times 15 \times 7}{35 \times 17 \times 11} = \frac{990}{7 \times 17 \times 11} = \frac{90}{119}。$$

則對角線 $\overline{AC}$ 長為 $\sqrt{11}$ 。

$$\begin{aligned} \text{令 } \overline{AC} = x, \triangle ABC \text{ 中, } \cos B &= \frac{5^2 + 1^2 - x^2}{2 \times 5 \times 1}, \\ \triangle ADC \text{ 中, } \cos D &= \frac{7^2 + 5^2 - x^2}{2 \times 7 \times 5}, \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \cos B = -\cos D \Rightarrow \frac{5^2 + 1^2 - x^2}{2 \times 5 \times 1} = -\frac{7^2 + 5^2 - x^2}{2 \times 7 \times 5} \Rightarrow \text{解得 } x = \sqrt{32}。$$


- E. 一礦物內含 A 、 B 、 C 三種放射性物質，放射出同一種輻射。已知 A 、 B 、 C 每公克分別會釋放出 1 單位、2 單位、1 單位的輻射強度，又知 A 、 B 、 C 每過半年其質量分別變為原來質量的 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 倍。於一年前測得此礦物的輻射強度為 66 單位，而半年前測得此礦物的輻射強度為 22 單位，且目前此礦物的輻射強度為 8 單位，則目前此礦物中 A 、 B 、 C 物質之質量分別為 、 、 公克。

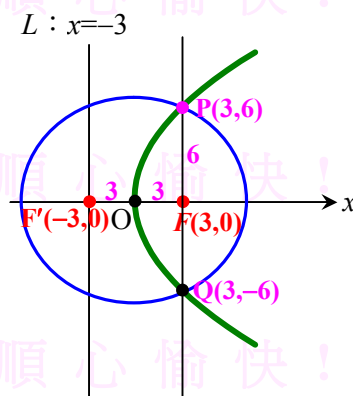
- E. **解：** 設目前此礦物中 A 、 B 、 C 物質之質量分別為 x 、 y 、 z 公克，
則半年前此礦物中 A 、 B 、 C 物質之質量分別為 $2x$ 、 $3y$ 、 $4z$ 公克，
一年前此礦物中 A 、 B 、 C 物質之質量分別為 $4x$ 、 $9y$ 、 $16z$ 公克，

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 \times y + z = 8 \\ 2x + 2 \times 3y + 4z = 22 \\ 4x + 2 \times 9y + 16z = 66 \end{cases} \Rightarrow \text{解得 } x = 4, y = 1, z = 2.$$

- F. 設 $E_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (其中 $a > 0$) 為焦點在 $(3, 0)$ 、 $(-3, 0)$ 的橢圓； E_2 ：焦點在 $(3, 0)$ 且準線為 $x = -3$ 的拋物線。已知 E_1, E_2 的交點在直線 $x = 3$ 上，則 $a = \underline{\quad} + \underline{\quad} \sqrt{\underline{\quad}}$ 。

- F. **解：** 拋物線頂點為 $O(0, 0)$ ，拋物線焦點為 $F(3, 0)$ ，
則正焦弦端點為 $P(3, 6)$ 與 $Q(3, -6)$ ，
如圖，橢圓與拋物線交點在直線 $x = 3$ 上，
即交點為 $P(3, 6)$ 與 $Q(3, -6)$ 。

$$\Rightarrow 2a = \overline{PF} + \overline{PF'} = 6 + 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3 + 3\sqrt{2}.$$



- G. $H: x - y + z = 2$ 為坐標空間中一平面， L 為平面 H 上的一直線。已知點 $P(2, 1, 1)$ 為 L 上距離原點 O 最近的點，則 $(2, \underline{\quad}, \underline{\quad})$ 為 L 的方向向量。

- G. **解：** 平面 $H: x - y + z = 2$ 的法向量 $\vec{n} = (1, -1, 1)$ ，設 L 的方向向量為 $\vec{d}$ ，

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OP} \perp \vec{d} \\ \vec{n} \perp \vec{d} \end{cases} \Rightarrow \vec{d} \parallel (\overrightarrow{OP} \times \vec{n})$$

$$\text{又 } \begin{cases} \overrightarrow{OP} = (2, 1, 1) \\ \vec{n} = (1, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OP} \times \vec{n} = (2, -1, -3) \Rightarrow \text{所求方向向量} = \vec{d} = (2, -1, -3),$$

