TRML 思考賽-2009

思考賽共 10 題，每題 4 分。答題時必須寫明計算或證明過程，為得到滿分，答題方式必須合理，層次清楚簡明。前面小題縱使未被證出，也可被引用來解後面小題；但反之後面小題的結果，未正確證明之前，不可用來解前面小題。第 11 題為加分題，並不是每一隊均必須作答。若　貴隊已完成前面 10 題後仍有時間，可嘗試做此題，加分題答對可多得 8 分。繳交的答案紙每張至多寫一小題，且必須在每張答案紙上方標明題號且依序排列。每張紙上只寫一面，不要寫兩面。

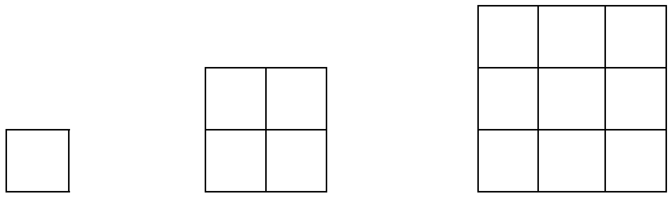
准考編號大會已直接印於答案紙上，在繳交的答案卷上，不可用其他方式表明隊伍的身份。

考慮有 m 列、n 行的 $m\times n$ 棋盤，用 (i, j) 表示第 i 列第 j 行的方格。下圖是一個 3×5 的棋盤：

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5

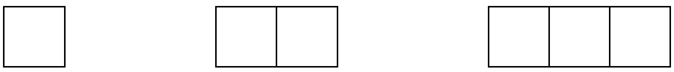
3×5 棋盤

首先介紹三種由方格組成的圖形：S_r 表示 $r\times r$ 的棋盤，例如：



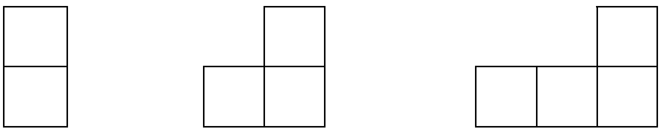
S_1　　S_2　　S_3

P_r 表示 $1\times r$ 的棋盤，例如：



P_1　　P_2　　P_3

L_r 表示由 P_r 最右一格上方接上一個方格的圖形，例如：



L_1　　L_2　　L_3

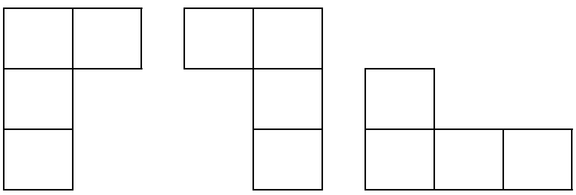
其次，我們說 $m\times n$ 棋盤中有一個圖形 T 與圖形 G 同構，是指圖形 T 可由圖形 G 經過若干次旋轉、平移或翻轉所得到的，任何一個與 G 同構的圖形均稱為 G 圖形。例如，在上述 3×5 的棋盤中

1,1
2,1
3,1

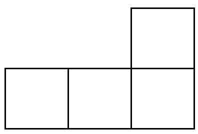
與

2,3	2,4	2,5

同構，均稱為 P_3 圖形



等都與



L_3

同構，均稱為 L_3 圖形

對於$m\times n$棋盤中的A圖形，我們以$b(m,n,A)$表示最小的非負整數k，使得在$m\times n$棋盤中可以找出k個格子組成的集合B，滿足任何一個與A同構的圖形都與B至少有一個共同的格子，像這樣的集合B就稱為A阻隔集，例如：$b(2,2,P_2)=2$及$b(2,3,L_3)=2$。

	*
*	

		*
*		

上列二圖形中標星號方格所形成的集合，分別為P_2及L_3的一個阻隔集。當A阻隔集B為空集合時，$b(m,n,A)=0$。所以，當$r>m$或$r>n$時，$b(m,n,S_r)=0$；當$r>m$且$r>n$時，$b(m,n,P_r)=0$且$b(m,n,L_r)=0$。

顯然，$b(m,n,A)=b(n,m,A)$恆成立。我們以$[x]$表示小於或等於x的最大整數，以$|B|$表示集合B所含的格子數，則$b(1,n,P_r)=\left[\frac{n}{r}\right]$。要說明這個等式，首先，$B=\{(1,j):1\le j\le n,\text{且}j\text{是}r\text{的倍數}\}$是一個$P_r$阻隔集，所以$b(1,n,P_r)\le|B|=\left[\frac{n}{r}\right]$；其次，$1\times n$棋盤可以分割成$\left[\frac{n}{r}\right]$個$P_r$圖形及一個$P_{n-r\left[\frac{n}{r}\right]}$圖形，任一個$P_r$阻隔集一定要包含每一個$P_r$圖形中至少一個方格，所以$b(1,n,P_r)\ge\left[\frac{n}{r}\right]$，因此可得$b(1,n,P_r)=\left[\frac{n}{r}\right]$。

(1) 試求$b(4,7,S_3)$之值，並說明理由。

(2) 試求$b(m,n,S_r)$之值，並說明理由。

(3) 試求$b(m,n,P_2)$之值，並說明理由。

(4) 試求$b(5,8,P_3)$之值，並說明理由。

(5) 試求$b(m,n,P_3)$之值，並說明理由。

(6) 試求$b(m,n,P_4)$之值，並說明理由。

(7) 試求$b(2,n,L_2)$之值，並說明理由。

(8) 試求$b(3,n,L_2)$之值，並說明理由。

(9) 試求$b(m,n,L_2)$之值，並說明理由。

(10) 試求$b(m,n,L_3)$之值，並說明理由。

下題為加分題

(11) 試求$b(m,n,P_r)$之值，並說明理由。

2009 TRML 思考賽答案

1 $b(4,7,S_3)=2$

2 $b(m,n,S_r)=\left[\frac{m}{r}\right]\cdot\left[\frac{n}{r}\right]$

3 $b(m,n,P_2)=\left[\frac{mn}{2}\right]$

4 $b(5,8,P_3)=13$

5 當 $m\le 2$ 時，$b(m,n,P_3)=b(n,m,P_3)=m\left[\frac{n}{3}\right]$

當 $m\ge 3$ 且 $n\ge 3$ 時，$b(m,n,P_3)=\left[\frac{mn}{3}\right]$

6 當 $m\le 3$ 時，$b(m,n,P_4)=b(n,m,P_4)=m\left[\frac{n}{4}\right]$

當 $m\ge 4$，$n\ge 4$ 時，令 $m=4p+a$，其中 $0\le a\le 3$，$n=4q+b$，其中 $0\le b\le 3$，

則 $b(m,n,P_4)=\frac{mn-ab}{4}+\max\{0,a+b-4\}$

7 $b(2,n,L_2)=2\left[\frac{n}{2}\right]$

8 $b(3,1,L_2)=0$；當 $n\ge 2$ 時，$b(3,n,L_2)=n$

9 設 n 為偶數，或者 $m\le n$ 均為奇數，則 $b(m,n,L_2)=\left[\frac{m}{2}\right]n$

10 當 $n\ge 1$ 時，$b(1,n,L_3)=b(n,1,L_3)=0$

當 $n\ge 2$ 時，$b(2,n,L_3)=b(n,2,L_3)=2\left[\frac{n}{3}\right]$

當 $m\ge 3$ 且 $n\ge 3$ 時，$b(m,n,L_3)=\left[\frac{mn}{3}\right]$

11 當 $m\le r-1$ 時，$b(m,n,P_r)=b(n,m,P_r)=m\left[\frac{n}{r}\right]$

當 $m\ge r$，$n\ge r$ 時，令 $m=rp+a$，其中 $0\le a\le r-1$，$n=rq+b$，其中 $0\le b\le r-1$，

則 $b(m,n,P_r)=\frac{mn-ab}{r}+\max\{0,a+b-r\}$。