

TRML 個人賽-2009 第一回

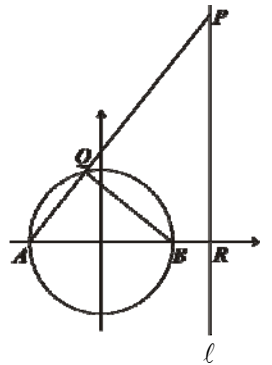
I-1. 設等比數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{98}$ 之第 3 項為 12，第 6 項為 96。若 p, q 為正整數， $1 \leq p \leq 9$ 且

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + \dots + a_{97} a_{98} = p \times (4^q - 1),$$

則 $p+q =$ _____。

I-2. 函數 $f(x) = x^2 + 2\sqrt{4-x^2}$ 的最大值為 _____。

I-3. 如圖，圓 $C: x^2 + y^2 = 25$ 與直線 $l: x=7$ 。設圓 C 與 x 軸交於點 A 與 B 兩點；直線 l 與 x 軸交於點 R ，點 P 在 l 上，且點 Q 為直線 PA 與圓 C 的交點。若 $\triangle APR$ 的面積等於 $\triangle AQB$ 的 4 倍，則點 Q 的 x 坐標為 _____。



TRML 個人賽-2009 第二回

I-4. 設 a, b 為實數，其中 $a > 1, b > 0$ 。若 $ab = a^{2b}$ 且 $\frac{a}{b} = a^{14b}$ ，則 $a =$ _____。

I-5. 設圓內接四邊形的四個邊長分別為 3、4、4、4，則此圓之半徑為 _____。

I-6. 給定橢圓 $\Gamma: 4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 7 = 0$ 上的兩個點 $Q(1,1)$ 和 $R\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ ， O 為橢圓中心。若動點 P 在較短的橢圓弧 \widehat{RQ} 上移動，則四邊形 $ORPQ$ 的最大面積為 _____。

TRML 個人賽-2009 第三回

I-7. 不等式 $\log_4(-x^2 + 4x + 5) \geq \log_2 \sqrt{3x-1}$ 解的範圍為 _____ 。

I-8. 稜長 1 的正立方體箱子內部有一圓錐，此圓錐的底圓恰為立方體下底面正方形的內切圓，圓錐的頂點在立方體上底面的中心。若此圓錐內部有一個球與圓錐相切並與立方體下底面相切，則此球的半徑為 _____ 。

I-9. 從 $\{-1, 3, 11\}$ 中重複取出 15 個數 a_1, a_2, \dots, a_{15} 。已知 $a_1 + a_2 + \dots + a_{15} = 41$ 且 $(a_1 + 5)(a_2 + 5) \cdots (a_{15} + 5) = 2^{42}$ ，則 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{15}^2 =$ _____ 。

TRML 個人賽-2009 第四回

I-10. 設 O 為原點，若向量 \overrightarrow{OA} 以 O 為定點，逆時針旋轉 $\frac{\pi}{2}$ 得向量 \overrightarrow{OB} ，且 $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (3, 4)$ ，則向量 $\overrightarrow{OB} =$ _____ 。

I-11. 若正數 x 使得 $f(x) = 5\sin \frac{\pi x}{3} - 3\sin \frac{\pi x}{5}$ 有最大值，則 x 的最小值為 _____ 。

I-12. 考慮所有大於 1 的實數 a ，它使得方程式 $ax^2 + 2(2a-1)x + (4a-7) = 0$ 至少有一個整數根，則滿足上述條件所有的正實數 a 之總和為 _____ 。

2009 TRML 個人賽第一回答案

I-1. 103

I-2. 5

I-3. $-\frac{7}{5}$

2009 TRML 個人賽第二回答案

I-4. 16

I-5. $\frac{8}{3}$

I-6. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

2009 TRML 個人賽第三回答案

I-7. $\frac{1}{3} < x \leq 3$

I-8. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

I-9. 319

2009 TRML 個人賽第四回答案

I-10. $(-1, 2)$

I-11. $\frac{15}{2}$

I-12. $\frac{27}{4}$